

DS 6

14.02.2026 – 4h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
 - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
 - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Donner la factorisation réelle du polynôme $Y^3 - 1$, puis factoriser le polynôme $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)}{1 - \cos \frac{2}{n}}$.
3. Série harmonique et constante d'Euler. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n.$$

- a. À l'aide du théorème des accroissements finis dont on détaillera précisément l'utilisation, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

- b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
 - c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$, et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.
 - d. En particulier, donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P = (X^2 - 1)^n$.
 - a. Donner le degré de $P^{(n)}$ et la multiplicité de -1 et 1 pour le polynôme $P^{(k)}$, où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
 - b. Montrer que $P^{(n)}$ possède n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Exercice 2 – Dérivées de la fonction tangente

On introduit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (X^2 + 1)P'_n \end{cases}$$

1. Calculer les polynômes P_n pour $n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
2.
 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .
 - b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme P_n sont des entiers naturels.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de la fonction polynomiale $\tilde{P}_n$ associée à P_n .
- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n n'a aucune racine réelle non nulle.
3. Dans toute la suite, on considère la fonction

$$\begin{array}{ccc} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$$

- a. Déterminer en le justifiant un développement limité de f à l'ordre 5 en 0.
- b. En déduire sans calcul (ou presque) les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
4. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
- $$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\tan x).$$
- b. Retrouver le résultat de la question 3b.
- c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On dit que f est absolument positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3 – Espace des solutions d'une équation

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$\mathcal{S} = \{f \in E, f''' + f'' + f' + f = 0_E\}$$

où 0_E désigne la fonction nulle.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathcal{S}$ est stable par dérivation, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, on a aussi $f' \in \mathcal{S}$.
2. On note $g : x \mapsto e^{-x}$ et

$$G = \{f \in E, f' + f = 0_E\}.$$

- a. Montrer que si $f \in G$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$.

On pourra introduire la fonction $h : x \mapsto e^x f(x)$.

- b. En déduire que $G = \text{Vect}(g)$.

3. On pose

$$F = \{f \in E, f'' + f = 0_E\}.$$

- a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

- b. Soit $f \in F$. On introduit les fonctions φ et ψ de E définies par

$$\varphi : x \mapsto f(x) - f(0) \cos(x) - f'(0) \sin(x), \quad \psi : x \mapsto \varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2.$$

Exprimer φ'' en fonction de φ , et montrer que la fonction ψ est constante et nulle. Justifier que φ est nulle également.

- c. En déduire que $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

4. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, on a $f' + f \in F$ et $f'' + f \in G$.
5. Montrer que $\mathcal{S} = F \oplus G$, et décrire explicitement l'ensemble des solutions de l'équation $f''' + f'' + f' + f = 0_E$.

Exercice 4 – Méthode de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et le segment $I = [a, b]$.

Partie I – Théorème du point fixe contractant

On considère une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(I) \subset I$: pour tout $x \in I$, $a \leq g(x) \leq b$, et on suppose que g est k -lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, |g(y) - g(x)| \leq k|y - x|.$$

1. a. Rappeler la définition de la continuité de g en un point $c \in I$, et montrer que g est continue en tout point de I .

- b. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution sur I , et que cette solution est unique. Dans la suite, on notera α cette solution :

$$g(\alpha) = \alpha.$$

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie en fixant $x_0 \in I$ et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|.$$

En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Partie II – Méthode de Newton

On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Nous nous intéressons ici à l'équation

$$f(x) = 0. \quad (E)$$

Nous allons introduire une suite approchant l'unique solution de (E) dans I , et nous nous intéresserons à sa vitesse de convergence.

3. Justifier que (E) admet une unique solution dans $]a, b[$, qu'on notera α dans la suite, de sorte que

$$f(\alpha) = 0.$$

4. Pour $x_0 \in I$, déterminer l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Illustrer par un graphique faisant apparaître les éléments ci-dessus, ainsi que α .

5. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

- a. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

- b. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

6. Suite approchant α .

- a. Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que $[\alpha - h, \alpha + h] \subset I$ et

$$\forall x \in [\alpha - h, \alpha + h], |g'(x)| < 1.$$

Dans la suite, on note $J = [\alpha - h, \alpha + h]$.

- b. Montrer que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$.

- c. Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que g est k -lipschitzienne sur J , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in J, |g(y) - g(x)| \leq k |y - x|.$$

En déduire que si $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

7. Vitesse de convergence.

On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I .

- a. Écrire la formule de Taylor-Young pour g à l'ordre 2 en α , et justifier qu'il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in I, |x - \alpha| < \eta \Rightarrow |g(x) - \alpha| \leq C(x - \alpha)^2.$$

- b. Soit $\delta = \min\left(\frac{1}{2C}, \eta\right)$. On considère $x_0 \in I$ tel que $|x_0 - \alpha| < \delta$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini, et

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C(x_n - \alpha)^2.$$

- c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C|x_n - \alpha| \leq (C(x_0 - \alpha))^2$, puis $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{C} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

Exercice 5 – Une suite de sous-espaces supplémentaires

Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de réels deux à deux distincts et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace vectoriel de E :

$$F_k = \{f \in E, f(a_1) = \dots = f(a_k) = 0\}.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note G_k le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus $k - 1$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $E = F_k \oplus G_k$.

2. On pose

$$F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} F_k, \quad \text{et} \quad G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} G_k.$$

a. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

b. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ? Sont-ils supplémentaires dans E ?

★ ★ ★