

DS 6

Corrigé

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Donner la factorisation réelle du polynôme $Y^3 - 1$, puis factoriser le polynôme $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\cos \frac{1}{n})}{1 - \cos \frac{2}{n}}$.
3. *Série harmonique et constante d'Euler.* On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n.$$

- a. À l'aide du théorème des accroissements finis dont on détaillera précisément l'utilisation, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

- b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$, et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.
- d. En particulier, donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P = (X^2 - 1)^n$.
 - a. Donner le degré de $P^{(n)}$ et la multiplicité de -1 et 1 pour le polynôme $P^{(k)}$, où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
 - b. Montrer que $P^{(n)}$ possède n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

1. On a $Y^3 - 1 = (Y - 1)(Y^2 + Y + 1)$, donc $X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1)$. On en déduit que les racines de $X^6 + X^3 + 1$ sont les éléments de $\mathbb{U}_9 \setminus \mathbb{U}_3$. Ceci entraîne :

$$X^6 + X^3 + 1 = \left(X - e^{\frac{2i\pi}{9}} \right) \left(X - e^{\frac{4i\pi}{9}} \right) \left(X - e^{\frac{8i\pi}{9}} \right) \left(X - e^{-\frac{2i\pi}{9}} \right) \left(X - e^{-\frac{4i\pi}{9}} \right) \left(X - e^{-\frac{8i\pi}{9}} \right).$$

2. On a $\ln(\cos \frac{1}{n}) = \ln(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $1 - \cos \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \frac{4}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Ceci entraîne

$$\frac{\ln(\cos \frac{1}{n})}{1 - \cos \frac{2}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{4}.$$

3. a. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\ln$ sur l'intervalle $[k, k+1]$, sur lequel elle est dérivable. Sa dérivée étant la fonction inverse qui est décroissante, on a :

$$\forall x \in]k, k+1[, \frac{1}{k+1} \leq \ln'(x) \leq \frac{1}{k}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k+1} (k+1 - k) \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} (k+1 - k).$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq 0$$

par la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

- c. Par décroissance, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_1 = 1$. Par ailleurs, par la question (3a) et un télescopage, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n \geq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln k) + \frac{1}{n} - \ln n = \ln n - \ln 1 + \frac{1}{n} - \ln n = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et bornée, donc elle converge vers un réel γ . Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on a $\gamma \in [0, 1]$.

d. D'après la question précédente, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

4. On a $\deg P = 2n \in \mathbb{N}^*$, donc $\deg(P^{(n)}) = \deg P - n = n$. Par ailleurs, on a $m_1(P) = m_{-1}(P) = n$, donc si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $m_1(P^{(k)}) = m_{-1}(P^{(k)}) = n - k$.

5. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme $P^{(k)}$ a k racines distinctes dans $] -1, 1[$.

– $P^{(0)} = P$ ne possède pas de racine dans $] -1, 1[$ car ses seules racines sont -1 et 1 .

– Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons que $P^{(k)}$ a k racines distinctes dans $] -1, 1[$, notées $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ avec $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$. On note par ailleurs $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$, qui sont aussi racines de $P^{(k)}$ d'après la question précédente.

On applique alors le théorème de Rolle à la fonction polynomiale $\widetilde{P^{(k)}}$, qui est dérivable sur chaque intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, avec $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$:

$$\widetilde{P^{(k)}}(\alpha_{i-1}) = \widetilde{P^{(k)}}(\alpha_i) = 0, \quad \text{il existe } \beta_i \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \text{ tel que } \widetilde{P^{(k+1)}}(\beta_i) = 0.$$

Finalement, on a trouvé $k+1$ racines $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ de $P^{(k+1)}$ dans $] -1, 1[$. Comme -1 et 1 sont des racines de multiplicité $n - k - 1$, la somme des multiplicités obtenues est $2(n - k - 1) + k + 1 = 2n - (k + 1) = \deg P^{(k+1)}$, donc il n'y a pas d'autres racines.

En prenant $k = n$, on obtient bien le résultat.

Exercice 2 – Dérivées de la fonction tangente

On introduit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (X^2 + 1)P'_n \end{cases}$$

- Calculer les polynômes P_n pour $n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme P_n sont des entiers naturels.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de la fonction polynomiale $\tilde{P}_n$ associée à P_n .
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n n'a aucune racine réelle non nulle.
- Dans toute la suite, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan x \end{aligned}$$

- Déterminer en le justifiant un développement limité de f à l'ordre 5 en 0.
 - En déduire sans calcul (ou presque) les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f^{(n)}(x) = P_n(\tan x).$$
 - Retrouver le résultat de la question 3b.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On dit que f est absolument positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

1. On a :

$$\begin{aligned} P_0 &= X, \quad P_1 = X^2 + 1, \quad P_2 = 2X^3 + 2X, \quad P_3 = 6X^4 + 8X^2 + 2 \\ P_4 &= 24X^5 + 40X^3 + 16X, \quad P_5 = 120X^6 + 240X^4 + 136X^2 + 16. \end{aligned}$$

- On montre par récurrence que $\deg P_n = n + 1$ et $c_{\text{dom}}[P_n] = n!$.
 - Comme $\deg P_0 = 1$ et $c_{\text{dom}}[P_0] = 1$, le résultat est vrai au rang 0.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Si le résultat est vrai au rang n , alors $P_n = n!X^{n+1} + Q_n$ avec $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc on a $P_{n+1} = (X^2 + 1)((n+1)X^n + Q'_n) = (n+1)X^{n+2} + R_n$ avec $R_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, d'où le résultat.
 - On montre le résultat par récurrence :

- P_0 est à coefficients dans $\mathbb{N}$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, si P_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ alors son polynôme dérivé également, donc $P_{n+1} = (X^2 + 1)P'_n$ est à coefficients dans $\mathbb{N}$ car, par l'expression des coefficients du produit, le produit de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ est à coefficients dans $\mathbb{N}$.
 - c. On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{P}_{2k}$ est impaire et P_{2k+1} est paire.
 - On remarque que $\tilde{P}_0$ est impaire et $\tilde{P}_1$ est paire.
 - Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $\tilde{P}_{2k}$ est impaire et $\tilde{P}_{2k+1}$ est paire, alors $\tilde{P}'_{2k+1}$ est impaire. Ainsi, $x \mapsto (x^2 + 1)\tilde{P}'_{2k+1}(x)$ est impaire, et on en déduit que $\tilde{P}_{2k+2}$ est impaire. Puis, avec le même argument, $\tilde{P}_{2k+3}$ est paire.
 - d. Comme P_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et est non nul, il est clair que pour tout $x > 0$, on a $\tilde{P}_n(x) > 0$, ce qui entraîne que P_n n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit par la parité de $\tilde{P}_n$ que P_n n'a pas non plus de racine dans $\mathbb{R}_-^*$.
3. a. On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc

$$1 + \tan^2 x = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = 1 + x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 = 1 + x^2 \left(1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

On obtient $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$, donc $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ par primitivation.

- b. Par identification avec la formule de Taylor-Young de la fonction $\tan$ à l'ordre 5 en 0, on obtient $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 0$ et $f^{(5)}(0) = 16$.
4. a. Montrons le résultat par récurrence.
- On a bien sûr pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $P_0(\tan x) = \tan x = f(x) = f^{(0)}(x)$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Si le résultat est vrai au rang n , alors pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$f^{(n+1)}(x) = \tan'(x)P'_n(\tan x) = (1 + \tan^2 x)P'_n(\tan x) = P_{n+1}(\tan x).$$

- b. On a alors $f^{(n)}(0) = P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et les calculs de question 1 confirment bien les résultats de 3b.
- c. Comme $\tan\left([0, \frac{\pi}{2}[\right) \subset \mathbb{R}_+$ et $\tilde{P}_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que $f^{(n)}$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par la question précédente.

Exercice 3 – Espace des solutions d'une équation

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$\mathcal{S} = \{f \in E, f''' + f'' + f' + f = 0_E\}$$

où 0_E désigne la fonction nulle.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathcal{S}$ est stable par dérivation, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, on a aussi $f' \in \mathcal{S}$.
2. On note $g : x \mapsto e^{-x}$ et

$$G = \{f \in E, f' + f = 0_E\}.$$

- a. Montrer que si $f \in G$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$.

On pourra introduire la fonction $h : x \mapsto e^x f(x)$.

- b. En déduire que $G = \text{Vect}(g)$.

3. On pose

$$F = \{f \in E, f'' + f = 0_E\}.$$

- a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
- b. Soit $f \in F$. On introduit les fonctions φ et ψ de E définies par

$$\varphi : x \mapsto f(x) - f(0) \cos(x) - f'(0) \sin(x), \quad \psi : x \mapsto \varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2.$$

Exprimer φ'' en fonction de φ , et montrer que la fonction ψ est constante et nulle. Justifier que φ est nulle également.

- c. En déduire que $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

4. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, on a $f' + f \in F$ et $f'' + f \in G$.
5. Montrer que $\mathcal{S} = F \oplus G$, et décrire explicitement l'ensemble des solutions de l'équation $f''' + f'' + f' + f = 0_E$.

1. Il est clair que la fonction nulle appartient à $\mathcal{S}$, et $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire par linéarité de la dérivation. Par ailleurs, si $f \in \mathcal{S}$, alors $(f''' + f'' + f' + f)' = 0_E$, donc $f^{(3)} + f^{(2)} + (f')' + f' = 0_E$, donc $f' \in \mathcal{S}$.
2.
 - a. Soient $f \in G$ et $h : x \mapsto e^x f(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x) = e^x(f'(x) + f(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, h est constante : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \lambda$, ou encore $f(x) = \lambda e^{-x}$.
 - b. D'après la question précédente, on a $G \subset \text{Vect}(g)$. Comme par ailleurs $g' + g = 0_E$, on a $g \in G$, ce qui donne $\text{Vect}(g) \subset G$.
3.
 - a. Si $f \in F$, on déduit de $f'' + f = 0_E$ en dérivant que $f''' + f' = 0_E$. En additionnant les deux égalités, on obtient que $f''' + f'' + f' + f = 0_E$, donc $f \in \mathcal{S}$. Par conséquent $F \subset \mathcal{S}$. Comme par ailleurs $0_E \in F$ et F est stable par combinaison linéaire par linéarité de la dérivation, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
 - b. On a $\varphi \in E$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de E . Par ailleurs, $\varphi'' = f'' + f(0) \cos + f'(0) \sin = -\varphi$. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car φ et φ' le sont, et $\psi' = 2\varphi\varphi' + 2\varphi'\varphi'' = 2\varphi\varphi' - 2\varphi'\varphi = 0$, donc ψ est constante sur $\mathbb{R}$.
On a par ailleurs $\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0$ et, comme $\varphi' = f' + f(0) \sin - f'(0) \cos$, $\varphi'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$. Ceci entraîne que $\psi(0) = 0$. Comme ψ est constante, elle est identiquement nulle.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2 = 0$, et par positivité des deux termes de la somme, on a $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$. On a donc bien montré que φ est identiquement nulle.
 - c. D'après la question précédente, $F \subset \text{Vect}(\cos, \sin)$. Comme $\cos'' = -\cos$ et $\sin'' = -\sin$, on a $\cos \in F$ et $\sin \in F$, donc $\text{Vect}(\cos, \sin) \subset F$.
4. Soit $f \in \mathcal{S}$. On a $(f' + f)'' + f' + f = f''' + f'' + f' + f = 0_E$, donc $f' + f \in F$.
Par ailleurs, $(f'' + f)' + f'' + f = f''' + f' + f'' + f = 0_E$, donc $f'' + f \in G$.
5. Soit $f \in \mathcal{S}$. Raisonnons par analyse synthèse.
 - Soient $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ telles que $f = f_1 + f_2$. On a alors $f' = f'_1 + f'_2 = f'_1 - f_2$, puis $f'' = f''_1 + f''_2 = -f_1 + f_2$. Finalement,

$$\text{comme } \begin{cases} f &= f_1 + f_2 \\ f'' &= -f_1 + f_2 \end{cases}, \quad \text{on a } f_1 = \frac{1}{2}(f - f'') \text{ et } f_2 = \frac{1}{2}(f + f'').$$
 - Si $f_1 = \frac{1}{2}(f - f'')$ et $f_2 = \frac{1}{2}(f + f'')$, on a $f_1 + f_2 = f$, et la question précédente donne $f_2 \in G$. Par ailleurs,

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + f' - (f' - f'')) \in F$$
 car $f - f' \in F$, et, comme $f' \in \mathcal{S}$ par stabilité de $\mathcal{S}$ par dérivation, on déduit de la question précédente que $f' - f'' \in F$. Ainsi, $f_1 \in F$ comme combinaison linéaire de fonctions de F .
 On a donc bien montré que toute fonction $f \in \mathcal{S}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G , c'est-à-dire $\mathcal{S} = F \oplus G$. On en déduit :

$$\mathcal{S} = \{\lambda g + \mu \cos + \nu \sin, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4 – Méthode de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et le segment $I = [a, b]$.

Partie I – Théorème du point fixe contractant

On considère une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(I) \subset I$: pour tout $x \in I$, $a \leq g(x) \leq b$, et on suppose que g est k -lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, |g(y) - g(x)| \leq k|y - x|.$$

1.
 - a. Rappeler la définition de la continuité de g en un point $c \in I$, et montrer que g est continue en tout point de I .
 - b. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution sur I , et que cette solution est unique. Dans la suite, on notera α cette solution :

$$g(\alpha) = \alpha.$$

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie en fixant $x_0 \in I$ et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|.$$

En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Partie II – Méthode de Newton

On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Nous nous intéressons ici à l'équation

$$f(x) = 0. \quad (E)$$

Nous allons introduire une suite approchant l'unique solution de (E) dans I , et nous nous intéresserons à sa vitesse de convergence.

3. Justifier que (E) admet une unique solution dans $]a, b[$, qu'on notera α dans la suite, de sorte que

$$f(\alpha) = 0.$$

4. Pour $x_0 \in I$, déterminer l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Illustrer par un graphique faisant apparaître les éléments ci-dessus, ainsi que α .

5. On considère la fonction

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

- a. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

- b. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

6. **Suite approchant α .**

- a. Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que $[\alpha - h, \alpha + h] \subset I$ et

$$\forall x \in [\alpha - h, \alpha + h], |g'(x)| < 1.$$

Dans la suite, on note $J = [\alpha - h, \alpha + h]$.

- b. Montrer que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$.

- c. Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que g est k -lipschitzienne sur J , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in J, |g(y) - g(x)| \leq k |y - x|.$$

En déduire que si $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

7. **Vitesse de convergence.** On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I .

- a. Écrire la formule de Taylor-Young pour g à l'ordre 2 en α , et justifier qu'il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in I, |x - \alpha| < \eta \Rightarrow |g(x) - \alpha| \leq C(x - \alpha)^2.$$

- b. Soit $\delta = \min\left(\frac{1}{2C}, \eta\right)$. On considère $x_0 \in I$ tel que $|x_0 - \alpha| < \delta$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini, et

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C(x_n - \alpha)^2.$$

- c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C|x_n - \alpha| \leq (C(x_0 - \alpha))^{2^n}$, puis $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{C} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

1. a. Soit $c \in I$. On a $|x - c| \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$, donc par comparaison, $|g(x) - g(c)| \leq |x - c| \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$, donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} g(c)$.
b. La fonction $h : x \mapsto g(x) - x$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$. De plus, $h(a) = g(a) - a \geq 0$, et $h(b) = g(b) - b \leq 0$ du fait que $g([a, b]) \subset [a, b]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $h(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $g(\alpha) = \alpha$.

Supposons qu'il existe $\beta \in I$ tel que $\beta \neq \alpha$ et $g(\beta) = \beta$. On a alors

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|,$$

et il y a contradiction, d'où l'unicité.

2. On montre le résultat par récurrence. C'est immédiat pour $n = 0$, et si $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|$,

alors $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha| \leq k^{n+1}|x_0 - \alpha|$.

Par encadrement, on a alors $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

3. La fonction f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés dont le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f s'annule sur $[a, b]$, et même sur $]a, b[$ puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls. La stricte croissance de f sur $[a, b]$ entraîne l'unicité du zéro de f sur $[a, b]$.
4. L'abscisse est donnée par $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
5.
 - a. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, f' est de classe $\mathcal{C}^1$).
 - b. On a $g(\alpha) = \alpha$, et comme pour tout x , $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, on a $g'(\alpha) = 0$.
6.
 - a. Comme $g'(\alpha) = 0$, la continuité de g' entraîne que $|g'| < 1$ sur un voisinage de α , c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$, on a $|g'(x)| < 1$.
 - b. Soit $x \in J$. Comme g est dérivable sur J , on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités x et α : il existe c dans cet intervalle tel que $g(x) - g(\alpha) = g'(c)(x - \alpha)$, ce qui donne

$$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq |g'(c)| |x - \alpha| \leq h,$$

donc $g(x) \in J$.

- c. Toujours par dérivabilité de g sur J , on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur J . Comme $|g'|$ est continue sur le segment J , $|g'|$ atteint son maximum qu'on note k . Il existe donc x^* tel que $k = |g'(x^*)|$, ce qui entraîne que $k < 1$. Ainsi, l'inégalité des accroissements finis donne : pour tous $x, y \in J$,

$$|g(y) - g(x)| \leq k|y - x|.$$

On peut alors utiliser les résultats de la partie I pour conclure que la suite (x_n) de l'énoncé converge vers α , qui est l'unique point fixe de g .

7.
 - a. Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$, g est de classe $\mathcal{C}^2$, et on peut écrire la formule de Taylor-Young pour g à l'ordre 2 en α :

$$g(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2).$$

Comme $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$, on a $g(x) - \alpha \underset{x \rightarrow \alpha}{=} \frac{g''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2)$. Finalement, on a^a

$$\frac{g(x) - \alpha}{(x - \alpha)^2} \underset{x \rightarrow \alpha}{=} \frac{g''(\alpha)}{2} + o(1), \text{ donc } \frac{|g(x) - \alpha|}{(x - \alpha)^2} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \frac{|g''(\alpha)|}{2}.$$

Ceci entraîne que, si $C > \frac{|g''(\alpha)|}{2}$, alors $\frac{|g(x) - \alpha|}{(x - \alpha)^2} \leq C$ sur un voisinage de α dans I , qu'on note $] \alpha - \eta, \alpha + \eta [$.

On a alors : pour tout $x \in I$, si $x \in] \alpha - \eta, \alpha + \eta [$, c'est-à-dire $|x - \alpha| < \eta$, alors $|g(x) - \alpha| \leq C(x - \alpha)^2$.

- b. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini, et $|x_n - \alpha| < \delta$.
 - Il est clair que le résultat est vrai pour $n = 0$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que x_n est bien défini, et $|x_n - \alpha| < \delta$. On a alors $x_n \in I$, x_{n+1} est bien défini, et comme $|x_n - \alpha| < \delta \leq \eta$, on a

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leq C(x_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|,$$

$$\text{car } C|x_n - \alpha| \leq C\delta \leq C \frac{1}{2C} \leq \frac{1}{2}.$$

On a alors montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $|x_n - \alpha| < \delta \leq \eta$, on a $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leq C(x_n - \alpha)^2$.

- c. Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C|x_{n+1} - \alpha| \leq (C|x_n - \alpha|)^2$, on obtient $C|x_n - \alpha| \leq (C(x_0 - \alpha))^{2^n}$ par une récurrence immédiate. On en déduit, comme $|x_0 - \alpha| \leq \delta \leq \frac{1}{2C}$

$$C|x_n - \alpha| \leq (C(x_0 - \alpha))^{2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n},$$

d'où le résultat.

^a. On pouvait aussi écrire directement que $g(x) - \alpha \underset{x \rightarrow \alpha}{=} O((x - \alpha)^2)$.

Exercice 5 – Une suite de sous-espaces supplémentaires

Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de réels deux à deux distincts et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace vectoriel de E :

$$F_k = \{f \in E, f(a_1) = \dots = f(a_k) = 0\}.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note G_k le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus $k - 1$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $E = F_k \oplus G_k$.
2. On pose

$$F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} F_k, \quad \text{et} \quad G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} G_k.$$

- a. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- b. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ? Sont-ils supplémentaires dans E ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $f \in E$. On considère les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ associés aux points $a_1, \dots, a_n$, et on note g la fonction polynomiale associée au polynôme $f(a_1)L_1 + \dots + f(a_n)L_n$. On a alors $g \in G_n$. Par ailleurs, par construction, on a $f(a_i) = g(a_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $f - g \in F_n$. On a donc $f = (f - g) + g \in F_n + G_n$. Ceci montre que $E = F_n + G_n$.
- Soit $f \in F_n \cap G_n$. On note P le polynôme associé à la fonction polynomiale f . Ainsi, P est de degré au plus $n - 1$ et a n racines distinctes puisque $f \in F_n$. On en déduit que P est nul, donc $f = 0_E$.

Ainsi, comme on vient de voir que la somme est directe, on a $E = F_n \oplus G_n$.

2. a. Comme toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E , F est bien un sous-espace vectoriel de E . Par ailleurs, on remarque que G est l'ensemble des fonctions polynomiales, qui est bien un sous-espace vectoriel de E .
- b. Si $f \in F \cap G$, alors on a $f(a_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, f est polynomiale et s'annule une infinité de fois, elle est donc nulle. On en déduit que la somme est directe.

Montrons que F et G ne sont pas supplémentaires dans E .

- Si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est non majorée, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $a_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

On considère $h : x \mapsto e^x$, et on suppose que $h \in F + G$, i.e. h est de la forme $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Si on note P le polynôme associé à la fonction polynomiale g , on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, e^{a_k} = P(a_k).$$

Ainsi, $\frac{P(a_{\varphi(k)})}{e^{a_{\varphi(k)}}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui est impossible car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{P(a_{\varphi(k)})}{e^{a_{\varphi(k)}}} = 1$.

- Si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, alors on peut en extraire une sous-suite $(a_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On considère cette fois $h \in E$ telle que $h(a_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (et on pose par exemple $h(x) = 0$ si $x \notin \{a_k, k \in \mathbb{N}^*\}$). On suppose que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, de polynôme associé P , de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $h(a_k) = P(a_k)$.

On a :

$$h(a_{\psi(k)}) = \psi(k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Toutefois, comme la suite est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|a_k| \leq M$. La fonction g étant continue sur le segment $[-M, M]$, elle y est bornée par un réel noté K . Par conséquent,

$$\frac{P(a_{\psi(k)})}{h(a_{\psi(k)})} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0, \quad \text{ce qui est impossible car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{P(a_{\psi(k)})}{h(a_{\psi(k)})} = 1.$$