DS 5

17.11.2026 – 3h

- *Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.*
- *Il est rappelé que :*
  - ⋆ *toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,*
  - ⋆ *tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).*
- *La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Un sous-anneau de $\mathbb{Q}$

On considère l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{n}{2k+1},\ n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. *a.* Soient $n, k \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$. Montrer :
$$\frac{2k+1}{n} \in A \ \Rightarrow\ n \text{ est impair.}$$
   b. En déduire que $x \in A$ est inversible dans A si et seulement s'il est de la forme
$$x = \frac{n}{2k+1}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et } n \text{ entier impair.}$$

Exercice 2 – Convolution de suites

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On rappelle que E est muni de l'addition des suites : si $u, v \in E$, la suite $u + v$ est définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)_n = u_n + v_n.$$
On munit par ailleurs E de la loi interne notée $\star$ définie de la manière suivante : si $u, v \in E$, la suite $u \star v \in E$ est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

1. Rappeler la définition de la commutativité pour la loi $\star$, et montrer que $\star$ est commutative.
2. On considère la suite e définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$
   Pour $u \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $(e \star u)_n$. Qu'en déduit-on ?
3. Montrer que $\star$ est distributive par rapport à $+$.
4. Rappeler la définition de l'associativité pour la la loi $\star$, et montrer que $\star$ est associative.
5. Quelle est la structure algébrique de $(E, +, \star)$? Justifier.

6. Quels sont les inversibles de E ?

Exercice 3 – Inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

On considère
$$A = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. *a.* Montrer que pour tout $x \in A$, il existe un *unique* couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
   Dans toute la suite, pour tout $x \in A$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, on note
   $$\bar{x} = a - b\sqrt{2}, \quad \text{et} \quad N(x) = x\bar{x}.$$
   b. Pour tout $x \in A$, exprimer $N(x)$ en fonction de $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$, et justifier que $N(x) \in \mathbb{Z}$.
   c. Montrer que pour tous $x, y \in A$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. Montrer que $x \in A$ est inversible dans A si et seulement si $N(x) \in \{-1, 1\}$.

On note :
- ⋄ $A^\times$ l'ensemble des inversibles de A,
- ⋄ $A_1^\times = A^\times \cap]1, +\infty[$ l'ensemble des inversibles x de A tels que $x > 1$.

4. *a.* Montrer que si $x \in A_1^\times$, alors $-1 \leqslant \bar{x} \leqslant 1$.
   b. En déduire que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ est le plus petit élément de $A_1^\times$.
5. Montrer que si $x \in A_1^\times$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$.
6. En déduire que $A_1^\times = \{\alpha^n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$.
7. Déterminer l'ensemble $A^\times$.

Exercice 4 – Interpolation de Lagrange et polynômes de Hilbert

À l'exception de la question 4, les deux parties sont indépendantes.

Partie I – Interpolation de Lagrange

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(x_j) = y_j. \tag{1}$$

1. *Unicité.* On suppose que $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ sont deux polynômes tels que
   $$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(x_j) = Q(x_j) = y_j.$$
   a. On note $R = P - Q$. Montrer que $R \in \mathbb{K}_n[X]$.
   b. Conclure à l'unicité.
2. *Existence.* Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose
   $$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$
   À titre d'exemple, si $n = 2$, on a défini $L_0 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, $L_1 = \frac{(X-x_0)(X-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $L_2 = \frac{(X-x_0)(X-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$.

   a. Justifier que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_i est de degré n.
   b. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, calculer $L_i(x_i)$. Pour $j \in [\![0, n]\!]$ tel que $i \neq j$, calculer $L_i(x_j)$.
   c. En déduire que si $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$, alors P vérifie (1).

3. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$$

Partie II – Polynômes stabilisant $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$

On s'intéresse dans cette partie aux polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ stabilisant un ensemble $K \subset \mathbb{C}$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in K,\ P(x) \in K.$$

On note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

4. *Cas* $K = \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$(\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow P \in \mathbb{Q}[X].$$

   On pourra appliquer la question 3 à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ *en choisissant* $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ \dots, x_n = n$.

5. *Cas* $K = \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$H_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

   On note par ailleurs $H_0 = 1$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant k-1 \\ \binom{n}{k} & \text{si } n \geqslant k \\ (-1)^k \binom{k-n-1}{-n-1} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

   b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \geqslant k$,

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

   On pourra par exemple raisonner par récurrence.

   c. En déduire que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} H_k(i) = H_{k+1}(n+1).$$

   d. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, et

$$Q = P(X+1) - P(X).$$

   Exprimer $\deg P$ en fonction de $\deg Q$.

   e. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, exprimer $P(k) - P(0)$ en fonction de $Q(0), \dots, Q(k-1)$.

   f. Montrer que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}$ sont exactement les polynômes de la forme

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$$

   où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

   On pourra raisonner par récurrence sur le degré de P.

⋆ ⋆ ⋆