DS 4

19.12.2025 – 2h

- *Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.*
- *Il est rappelé que :*
  - ⋆ *toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,*
  - ⋆ *tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).*
- *La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Triplets pythagoriciens

On dit que $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ est un triplet pythagoricien s'il vérifie l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (\mathscr{P})$$

Nous cherchons dans cet exercice à déterminer tous les triplets pythagoriciens.

1. Donner un exemple simple de triplet pythagoricien.
2. On suppose dans un premier temps que $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ est un triplet pythagoricien *tel que x et y sont premiers entre eux.*
   a. Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^\star$ et $n^2 \mid m^2$, alors $n \mid m$.
   On pourra par exemple s'intéresser à $v_p(n)$ et $v_p(m)$, où p est un nombre premier.
   b. En déduire que z et y sont premiers entre eux. Que dire de z et x ?
   c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^2 \equiv 0\,[4]$ ou $k^2 \equiv 1\,[4]$ (on pourra distinguer suivant la congruence de k modulo 4).
   d. En utilisant la question précédente, montrer que x et y n'ont pas la même parité, et préciser la parité de z.

   Dans toute la suite de la question 2, on suppose que x est pair et y impair. On note $x = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^\star$.

   e. Montrer qu'il existe $b, c \in \mathbb{N}^\star$ tels que
   $$\begin{cases} b + c = z, \\ b - c = y \end{cases}$$
   et en déduire que $a^2 = bc$.
   f. Montrer que b et c sont premiers entre eux.
   g. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}^\star$ tels que $b = u^2$ et $c = v^2$.
   h. En déduire que $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$ et $z = u^2 + v^2$.
3. On considère maintenant le cas général : soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ un triplet pythagoricien. On note $d = x \wedge y$.
   Justifier que $d \mid z$, et en se ramenant à la question 2, montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}^\star$ tels que
   $$\begin{cases} x = 2duv \\ y = d\,(u^2 - v^2) \\ z = d\,(u^2 + v^2) \end{cases} \qquad (1)$$
4. Réciproquement, montrer que tout triplet (x, y, z) vérifiant (1) avec $d, u, v \in \mathbb{N}^\star$ et $u > v$, est solution de $(\mathscr{P})$.
   Conclure, et donner un autre exemple de triplet pythagoricien.

Exercice 2 – Exponentielle de matrice

Dans cet exercice, on cherche à donner un sens à l'exponentielle d'une matrice carrée dans certains cas. Pour ce faire, on s'appuie sur une égalité qui caractérise l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Si $p \in \mathbb{N}^\star$, on dira dans cet exercice qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ si elle converge coefficient par coefficient vers M, c'est-à-dire :

$$\forall i,j \in [\![1,p]\!], \quad (M_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M_{i,j}, \tag{L}$$

où $(M_n)_{i,j}$ et $M_{i,j}$ désigne les coefficients respectifs de M_n et M à la ligne i et colonne j.

Cas de $\mathbb{R}$

1. On considère la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ définie sur $]-1,+\infty[$.
   a. Justifier que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$.
   b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$
   c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Dans toute la suite, si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on définit, lorsque la limite existe,

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n. \tag{2}$$

Cas de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$

On considère une matrice $A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, qu'on note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\beta_n \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ tels que
   $$\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \beta_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix},$$
   et que ces réels vérifient : $\beta_n = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}$ et $\theta_n = \arctan\frac{\alpha}{n}$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta_n) & -\sin(k\theta_n) \\ \sin(k\theta_n) & \cos(k\theta_n) \end{pmatrix}.$$
4. *a.* Donner la valeur de $\arctan 0$, puis calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n$, au sens défini en (L).
5. *a.* Montrer que $n\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n^n$.
6. En déduire que $E(A)$ existe[1], et donner son expression en fonction de α.

Cas des matrices diagonalisables

7. *Cas des matrices diagonales.* On considère une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera

1. Voir (2).

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Montrer que $E(D)$ existe, et donner son expression en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

8. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Montrer que $E(A)$ existe et donner son expression en fonction de P, P^{-1} et $E(D)$.

⋆ ⋆ ⋆