DS 3

15.11.2025 – 3h

- *Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.*
- *Il est rappelé que :*
  - ⋆ *toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,*
  - ⋆ *tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).*
- *La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Étude d'une application

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On considère l'application suivante :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \rightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cap A) \cup B \end{array}$$

1. Calculer $f(\varnothing), f(A), f(B)$ et $f(E)$.
2. Montrer que pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, on a
$$X \subset Y \ \Rightarrow \ f(X) \subset f(Y).$$
3. Montrer que $f \circ f = f$, c'est-à-dire que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f \circ f(X) = f(X)$.
4. Soient F un ensemble et $g : F \to F$ une application telle que $g \circ g = g$. Montrer les équivalences suivantes :
   - ◇ g est injective $\Leftrightarrow g = \mathrm{Id}_F$,
   - ◇ g est surjective $\Leftrightarrow g = \mathrm{Id}_F$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Exercice 2 – Suites de parties fractionnaires et densité dans $[0,1[$

Pour tout réel x, on appelle *partie fractionnaire* de x le réel

$$F(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

On dit qu'une partie D de $[0,1[$ est dense dans $[0,1[$ si pour tous $a, b \in [0,1[$ avec $a < b$, il existe $y \in D$ tel que $y \in [a,b]$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) \in [0,1[$.

Exemples de suites de parties fractionnaires

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = F(nx) = nx - \lfloor nx \rfloor$.

2. Si $x \in \mathbb{Z}$, que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période q, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+q} = u_n.$$

b. En déduire que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini, et montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans $[0, 1[$.

Exemples de suites denses dans $[0, 1[$

On dit qu'une suite réelle (x_n) est *à croissance lente* si

$$\begin{cases} (x_n) \text{ est croissante,} \\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \\ x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

4. Chacune des suites suivantes est-elle à croissance lente ? Justifier.

$$(n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (\ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}.$$

5. On considère maintenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à croissance lente telle que $x_0 = 0$. On fixe par ailleurs $a, b \in [0, 1[$ tels que $a < b$, et on note $\varepsilon = b - a$.
   a. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.
   b. On note $A = \lfloor x_N \rfloor + 1$. Justifier l'existence de $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant A + a\}$, et préciser pourquoi $n_0 > N$. *Il pourra être utile de faire une représentation graphique.*
   c. Montrer que $x_{n_0} \in [A + a, A + b]$.
   d. En déduire que $\{F(x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1[$.

Exercice 3 – Suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Remarque : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy si deux termes quelconques u_p et u_q sont arbitrairement proches pourvu que p et q soient suffisamment grands.

Partie I – Une condition nécessaire de convergence

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Partie II – Convergence des suites de Cauchy

On se propose de montrer dans cette partie que toute suite de Cauchy converge. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n = \{u_k,\ k \geqslant n\}.$$

   Justifier que A_n possède une borne inférieure et une borne supérieure. Dans la suite, on notera

$$v_n = \inf A_n, \qquad \text{et} \qquad w_n = \sup A_n.$$

4. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
6. Montrer que $w_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
7. Conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Problème – Homographies de $\mathbb{C}$

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifient $ad - bc \neq 0$, on dit que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C},\, cz + d = 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

est une *homographie*.

Un exemple

On introduit l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\mathrm{i}z+\mathrm{i}}{-z+1} \end{array}$$

1. Justifier que h est une homographie, et montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, on a $h(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que h est injective.
3. Déterminer les nombres complexes $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $h(z) = w$ ait au moins une solution. L'application h est-elle surjective ? En déduire une partie F de $\mathbb{C}$ telle que h définisse une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ sur F.

Homographies conservant $\mathbb{U}$

Dans cette partie, on cherche à déterminer toutes les homographies h de $\mathbb{C}$ telles que h est bien définie sur $\mathbb{U}$, et :

$$\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \text{ existe et } h(z) \in \mathbb{U}. \qquad (\mathscr{P})$$

On dit alors que h *conserve* $\mathbb{U}$.

4. *Préliminaire.* Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'^2| + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z}')$.
5. *Deux types d'homographies conservant* $\mathbb{U}$.
   a. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
   $$h : z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z} \qquad (1)$$
   définit une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$. On dira alors que h est une homographie de type (1).
   b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
   $$h : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1} \qquad (2)$$
   définit une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$. On dira alors que h est une homographie de type (2).
   On pourra (par exemple) utiliser la question 4.
6. On cherche à montrer dans cette question que toutes les homographies conservant $\mathbb{U}$ sont soit de type (1), soit de type (2).
   On considère $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On suppose que
   $$h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$
   est une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
   a. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
   $$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\bar{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$
   b. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que :
   $$\text{si pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\,\mathfrak{Re}(v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0, \quad \text{alors } u = v = 0.$$
   Déduire alors de la question précédente que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $a\bar{b} = c\bar{d}$.
   c. Si $a = 0$, montrer que h est une homographie de type (1).
   d. On suppose désormais que $a \neq 0$. Montrer que
   $$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0.$$

e. Montrer que si $|a| = |c|$, alors $ad - bc = 0$. Qu'en déduire dans ce cas ?

f. Montrer que si $|a| = |d|$, alors h est une homographie de type (2), et conclure.

⋆ ⋆ ⋆