DS 1

20.09.2025 – 3h

- *Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.*
- *Il est rappelé que :*
  - ⋆ *toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,*
  - ⋆ *tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré, souligné ou surligné).*
- *La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer tous les réels x tels que
$$\sqrt{4x+5} \;=\; x.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   a. Rappeler la formule de Pascal. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)$.
   b. Pour $a_0,\dots,a_k \in \mathbb{R}$, préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   a. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k$.
   b. En exprimant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k$ d'une autre manière, déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la proposition $\mathcal{P}$: $(\forall\,\varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \;\Rightarrow\; (x = 0)$.
   a. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.
   b. Écrire la contraposée de l'implication $\mathcal{P}$.
   c. Montrer $\mathcal{P}$.

Exercice 2 – Résolution d'une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer, en raisonnant par analyse-synthèse, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad |f(x)+f(y)| \;=\; |x+y| \tag{$\star$}$$

1. *Préliminaire.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|1-x| = |1+x|$, alors $x = 0$.
2. *Analyse.* On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.
   a. Déterminer $f(0)$.
   b. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x)$.
   c. On suppose que $f(1) = 1$. En raisonnant par l'absurde, montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
   d. On suppose que $f(1) = -1$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x$.

e. Qu'en déduire sur f ?

3. *Synthèse.* Conclure.

Exercice 3 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Cet exercice vise à obtenir une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, on souhaite démontrer que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

1. Démontrer l'inégalité dans le cas où $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.
2. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$. On considère le polynôme du second degré en X défini par :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} (a_k X + b_k)^2.$$

a. Écrire $P(X)$ sous la forme $AX^2 + BX + C$ où $A, B, C \in \mathbb{R}$.

b. Justifier que le discriminant du polynôme $P(X)$ est négatif.

c. Conclure.

Exercice 4 – Autour de la suite de Fibonacci

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Suite de Fibonacci et nombre d'or

1. Montrer par récurrence double que pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Montrer que l'équation

$$x^2 = x + 1 \tag{1}$$

admet deux solutions réelles, notées φ et ψ, avec $\varphi \in \mathbb{R}_+$ et $\psi \in \mathbb{R}_-$. On explicitera φ et ψ.

On appelle φ le nombre d'or.

4. Montrer que $\psi = -\frac{1}{\varphi}$.
5. Montrer par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$

6. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$.

Ce dernier résultat fournit un moyen d'approcher le nombre d'or par des rationnels.

Propriétés de la suite de Fibonacci

On montre ici des propriétés indépendantes de la suite de Fibonacci.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer u_k en fonction de u_{k+2} et u_{k+1}, et en déduire une nouvelle expression de la somme
$$\sum_{k=0}^{n} u_k,$$
puis la calculer (on pourra effectuer le changement d'indice $\ell = k+1$).
8. Montrer à l'aide d'une récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

Théorème de Zeckendorf

On souhaite montrer le théorème suivant.

Théorème de Zeckendorf. Tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ s'écrit comme la somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts non consécutifs. De plus, à ordre des termes dans la somme près, cette décomposition est unique.

9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.
10. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, si $N \in \mathbb{N}^\star$ s'écrit
$$N = u_{n_1} + \ldots + u_{n_k}$$
avec $n_1, \ldots, n_k \in [\![2, +\infty[\![$ et $n_{i+1} > n_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, alors $N < u_{n_k+1}$.
On pourra raisonner par récurrence sur k.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, on pourra utiliser sans démonstration l'existence d'un plus grand entier M tel que $u_M \leqslant N$.

11. Déduire de la question 10 que si un entier $N \in \mathbb{N}^\star$ est la somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts et non consécutifs, alors u_M est un des termes de la somme, où M est le plus grand entier tel que $u_M \leqslant N$.
12. Montrer l'existence : tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ s'écrit comme la somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts non consécutifs.

    On pourra raisonner par récurrence forte.
13. Montrer l'unicité (à ordre des termes près) de la décomposition de tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ en somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts non consécutifs.
On pourra raisonner à nouveau par récurrence forte.

⋆ ⋆ ⋆