DS 1

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer tous les réels x tels que
$$\sqrt{4x+5} \;=\; x.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   a. Rappeler la formule de Pascal. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)$.
   b. Pour $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   a. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k$.
   b. En exprimant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k$ d'une autre manière, déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la proposition $\mathcal{P}$: $(\forall\,\varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \;\Rightarrow\; (x = 0)$.
   a. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.
   b. Écrire la contraposée de l'implication $\mathcal{P}$.
   c. Montrer $\mathcal{P}$.

---

1. On raisonne par analyse-synthèse.
   - *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{4x+5} = x$. Alors, on a $\left(\sqrt{4x+5}\right)^2 = x^2$, c'est-à-dire $4x+5 = x^2$. On en déduit que x est racine du polynôme $P = X^2 - 4X - 5$.
     Comme P a pour racines -1 et 5, on a donc $x \in \{-1, 5\}$.
   - *Synthèse.* On constate que 5 est solution de l'équation $\sqrt{4x-5} = x$, mais -1 ne l'est pas.

   Finalement, $\boxed{\text{l'équation } \sqrt{4x-5} = x \text{ admet 5 pour unique solution}}$.

2. *a.* Par la formule de Pascal, on a
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n+1} \;=\; \boxed{2^{n+1}-2}.$$
   b. On remarque que la somme est télescopique. On a alors
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right) \;=\; \binom{n}{n} - \binom{n}{0} \;=\; 1-1 \;=\; \boxed{0}.$$

3. *a.* On a :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k \;=\; \sum_{i=1}^{n} 2^i\,\frac{2^{n-i+1}-1}{2-1} \;=\; \sum_{i=1}^{n}(2^{n+1}-2^i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i \;=\; n2^{n+1} - 2(2^n-1)$$
$$= \;\boxed{(n-1)2^n + 2}.$$
   b. En permutant les sommes dans la somme double triangulaire, on obtient :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} 2^k \sum_{i=1}^{k} 1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\,2^k.$$

On déduit alors de la question précédente que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\,2^k = (n-1)2^n + 2}$.

4. *a.* La négation de $\mathcal{P}$ s'écrit : $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon)$ et $x \neq 0$.
   b. La contraposée de $\mathcal{P}$: s'écrit $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon)$.
   c. Pour montrer que $\mathcal{P}$ est vraie, on peut montrer la contraposée de $\mathcal{P}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \neq 0$, et montrons $\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon$.
   On pose $\varepsilon = |x|$. Comme $x \neq 0$, on a $|x| > 0$, ce qui donne $\varepsilon > 0$. Par ailleurs, on a bien $|x| \geqslant \varepsilon$, ce qui conclut.

Exercice 2 – Résolution d'une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer, en raisonnant par analyse-synthèse, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad |f(x) + f(y)| = |x + y| \tag{$\star$}$$

1. *Préliminaire.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|1 - x| = |1 + x|$, alors $x = 0$.
2. *Analyse.* On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.
   a. Déterminer $f(0)$.
   b. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = x$ ou $f(x) = -x)$.
   c. On suppose que $f(1) = 1$. En raisonnant par l'absurde, montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
   d. On suppose que $f(1) = -1$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x$.
   e. Qu'en déduire sur f ?
3. *Synthèse.* Conclure.

1. Si $|1 - x| = |1 + x|$, alors $|1 - x|^2 = |1 + x|^2$, c'est-à-dire $(1 - x)^2 = (1 + x)^2$.
   Comme $(1 + x)^2 - (1 - x)^2 = (1 + 2x + x^2) - (1 - 2x + x^2) = 4x$, on en déduit que $\boxed{x = 0}$.
2. *a.* Comme f vérifie $(\star)$, on a $|f(0) + f(0)| = |0 + 0|$, ce qui donne $2|f(0)| = 0$. Par conséquent, $\boxed{f(0) = 0}$.
   b. Soit $x \in \mathbb{R}$. La relation $(\star)$ en choisissant $y = 0$ donne alors
   $$|f(x) + f(0)| = |x|, \quad \text{donc} \quad |f(x)| = |x|, \quad \text{ce qui entraîne} \quad f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x.$$
   On a donc bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x)}$.
   c. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. D'après la question précédente, on a alors $f(x) = -x$. Ainsi, la relation $(\star)$ (où l'on choisit cette fois $y = 1$), donne $|f(x) + f(1)| = |x + 1|$. Comme on a aussi $|f(x) + f(1)| = |-x + 1|$, on en déduit alors que $|1 - x| = |x + 1|$.
   Par la question 1, on en déduit alors que $x = 0$. Par conséquent, on a $f(x) = x$, ce qui est une contradiction. On a ainsi prouvé :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x}.$$
   d. On introduit la fonction $g = -f$. On a alors $g(1) = -f(1) = 1$. Par ailleurs, on remarque que g vérifie $(\star)$. D'après la question précédente, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x$, c'est-à-dire
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x}$$
   N.B. : on pouvait aussi bien sûr procéder comme dans la question précédente.
   e. Comme on a vu que $f(1) \in \{-1, 1\}$, on déduit des deux questions précédentes que $f \in \{f_1, f_2\}$, où $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto -x$.
3. Comme dans la question précédente, on note $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto -x$. Pour tous $x, y, \mathbb{R}$, on a
   $$|f_1(x) + f_1(y)| = |x + y|, \quad \text{et} \quad |f_2(x) + f_2(y)| = |-x - y| = |x + y|.$$

Par conséquent, les fonctions f_1 et f_2 vérifient $(\star)$.

On a donc montré que $\boxed{f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont les seules fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ vérifiant } (\star)}$.

Exercice 3 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Cet exercice vise à obtenir une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, on souhaite démontrer que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

1. Démontrer l'inégalité dans le cas où $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.
2. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$. On considère le polynôme du second degré en X défini par :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} (a_k X + b_k)^2.$$

   a. Écrire $P(X)$ sous la forme $AX^2 + BX + C$ où $A, B, C \in \mathbb{R}$.

   b. Justifier que le discriminant du polynôme $P(X)$ est négatif.

   c. Conclure.

1. On suppose que $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$. Comme $a_1^2, \dots, a_n^2$ sont positifs, ceci entraîne que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k^2 = 0$ et donc $a_k = 0$. Ainsi, le membre de gauche et le membre de droite sont nuls, l'inégalité est vérifiée.
2. *a.* On a

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 X^2 + 2a_k b_k X + b_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) X^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) X + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

   d'où l'écriture recherchée avec $\boxed{A = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right),\ B = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right),\ \text{et } C = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)}$.

   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) \geqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto P(x)$ est de signe constant, le polynôme du second degré P a un discriminant négatif.

   c. Par la question précédente, on a $B^2 - 4AC \leqslant 0$, c'est-à-dire :

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0, \quad \text{donc} \quad \boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}.$$

Exercice 4 – Autour de la suite de Fibonacci

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Suite de Fibonacci et nombre d'or

1. Montrer par récurrence double que pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Montrer que l'équation
$$x^2 \;=\; x+1 \tag{1}$$
admet deux solutions réelles, notées φ et ψ, avec $\varphi \in \mathbb{R}_+$ et $\psi \in \mathbb{R}_-$. On explicitera φ et ψ.
On appelle φ le nombre d'or.
4. Montrer que $\psi = -\frac{1}{\varphi}$.
5. Montrer par récurrence double :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$
6. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$.
Ce dernier résultat fournit un moyen d'approcher le nombre d'or par des rationnels.

Propriétés de la suite de Fibonacci

On montre ici des propriétés indépendantes de la suite de Fibonacci.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer u_k en fonction de u_{k+2} et u_{k+1}, et en déduire une nouvelle expression de la somme
$$\sum_{k=0}^{n} u_k,$$
puis la calculer (on pourra effectuer le changement d'indice $\ell = k+1$).
8. Montrer à l'aide d'une récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

Théorème de Zeckendorf

On souhaite montrer le théorème suivant.

Théorème de Zeckendorf. Tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ s'écrit comme la somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts non consécutifs. De plus, à ordre des termes dans la somme près, cette décomposition est unique.

9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.
10. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, si $N \in \mathbb{N}^\star$ s'écrit
$$N \;=\; u_{n_1} + \ldots + u_{n_k}$$
avec $n_1, \ldots, n_k \in [\![2, +\infty[\![$ et $n_{i+1} > n_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, alors $N < u_{n_k+1}$.
On pourra raisonner par récurrence sur k.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, on pourra utiliser sans démonstration l'existence d'un plus grand entier M tel que $u_M \leqslant N$.

11. Déduire de la question 10 que si un entier $N \in \mathbb{N}^\star$ est la somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts et non consécutifs, alors u_M est un des termes de la somme, où M est le plus grand entier tel que $u_M \leqslant N$.
12. Montrer l'existence : tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ s'écrit comme la somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts non consécutifs.
On pourra raisonner par récurrence forte.
13. Montrer l'unicité (à ordre des termes près) de la décomposition de tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$ en somme de termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ distincts non consécutifs.
On pourra raisonner à nouveau par récurrence forte.

1. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 5$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \geqslant n$" est vraie.
   - On a $u_5 = 5 \geqslant 5$ et $u_6 = 8 \geqslant 6$, donc $\mathcal{P}(5)$ et $\mathcal{P}(6)$ sont vérifiées.
   - Soit n un entier tel que $n \geqslant 5$. On suppose que $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$, et on souhaite montrer que $u_{n+2} \geqslant n+2$. On a
   $$u_{n+2} \;=\; u_n + u_{n+1} \;\geqslant\; n + (n+1) \;=\; 2n+1 \;\geqslant\; n+2$$
   car $2n+1-(n+2) \;=\; n-1 \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Le principe de récurrence double assure alors : $\boxed{\forall n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n.}$

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$, on déduit de la question précédente et du théorème de comparaison que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

3. Les solutions de l'équation $x^2 = x+1$ sont les racines du polynôme du second degré $P(X) = X^2 - X - 1$. Le polynôme P a pour discriminant 5, et admet donc deux racines réelles [a], données par
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
Par stricte croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$. Par conséquent, $1-\sqrt{5} < 1-2 = -1$, donc $\psi < 0$. Ainsi,
$$\boxed{\text{l'équation } x^2 = x+1 \text{ admet une unique solution réelle positive, qui est } \varphi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

4. On a :
$$\psi \;=\; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \;=\; \frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} \;=\; \frac{-4}{2(1+\sqrt{5})} \;=\; \frac{-2}{1+\sqrt{5}}, \quad \text{donc on a bien } \boxed{\psi \;=\; -\frac{1}{\varphi}}.$$
N.B. : on pouvait aussi remarquer que le produit des racines du polynôme $X^2 - X - 1$ vaut $\frac{-1}{1} = -1$, donc $\varphi\psi = -1$.

5. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: $u_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ est vraie.
   – Si $n = 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Si $n = 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \psi) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   – Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie :
$$\begin{aligned} u_{n+2} \;=\; u_n + u_{n+1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n + \varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n(1+\varphi) - \psi^n(1+\psi)\right) \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}\right) \end{aligned}$$
   car, φ et ψ étant solutions de $x^2 = x+1$, on a $1+\varphi = \varphi^2$ et $1+\psi = \psi^2$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

   On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)}$.

6. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \frac{\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}}{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n} \;=\; \frac{\varphi^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}}{\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n}} \;=\; \frac{\varphi^{n+1}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}\right)}{\varphi^n\left(1 - \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}}\right)} \;=\; \varphi\,\frac{1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}}{1 - \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}}}.$$
   Comme $\varphi > 1$, on a $\varphi^2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{2n} \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} (\varphi^2)^n \;=\; +\infty$, donc comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$-\frac{1}{\varphi^{2n}} \;\leqslant\; \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}} \;\leqslant\; \frac{1}{\varphi^{2n}},$$
   le théorème d'encadrement entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}} = 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}} = 0$. On en déduit alors :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \varphi}.$$

7. On a
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} u_{k+2} - u_{k+1} \;=\; \sum_{\ell=1}^{n+1} u_{\ell+1} - u_\ell,$$
   en ayant recours au changement de variable $\ell = k+1$ dans la dernière somme. Par télescopage, on a alors
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k \;=\; u_{n+2} - u_1 \;=\; u_{n+2} - 1}.$$

8. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

- Si $n = 1$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = u_2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

  Si $n = 2$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 2 = u_3$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+2)$:

$$u_{n+3} \;=\; u_{n+2} + u_{n+1} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

  Or, avec la changement d'indice $\ell = k+1$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \;=\; \sum\limits_{\ell=1}^{n+1} \binom{n-(\ell-1)}{\ell-1} \;=\; \sum\limits_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1-\ell}{\ell-1}$, car $\binom{n+1}{-1} = 0$. Ainsi,

$$u_{n+3} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2-k}{k}$$

  car, par la formule de Pascal, $\binom{n+1-k}{k} + \binom{n+1-k}{k-1} = \binom{n+2-k}{k}$ pour tout entier k. Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}}$.

9. Si n est un entier tel que $n \geqslant 2$, alors on a :

$$u_{n+1} \;=\; u_{n-1} + u_n, \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n \;=\; u_{n-1} \;\geqslant\; n-1 \;\geqslant\; 1$$

   d'après la question 1. Par conséquent, on a $u_{n+1} - u_n > 0$. On en déduit alors que $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement croissante.

10. On raisonne par récurrence sur k.
   - Si $k = 1$: on suppose que N est de la forme $N = u_{n_1}$, on a alors $N < u_{n_1+1}$ par stricte croissance de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On suppose le résultat vrai au rang $k-1$. Si N s'écrit $N = u_{n_1} + \ldots + u_{n_k}$ avec $n_1, \ldots, n_k \in [\![2, +\infty[\![$ et $n_{i+1} > n_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, alors par hypothèse de récurrence,

$$u_{n_1} + \ldots + u_{n_{k-1}} \;<\; u_{n_{k-1}+1}.$$

     On a $n_k > n_{k-1} + 1$, donc $n_{k-1} < n_k - 1$, et $n_{k-1} + 1 \leqslant n_k - 1$. Ainsi, $u_{n_{k-1}+1} \leqslant u_{n_k - 1}$ par croissance de la suite $(u_n)_n$, et

$$N \;=\; u_{n_1} + \ldots + u_{n_{k-1}} + u_{n_k} \;<\; u_{n_{k-1}+1} + u_{n_k} \;\leqslant\; u_{n_k-1} + u_{n_k} \;=\; u_{n_k+1}.$$

     On a donc $N < u_{n_k+1}$, et la propriété est vraie au rang k.

   On a donc bien montré que $\boxed{\text{la propriété est vraie pour tout } k \in \mathbb{N}}$.

11. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que N s'écrit

$$N \;=\; u_{n_1} + \ldots + u_{n_k},$$

   avec $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ et $n_{i+1} > n_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$. On remarque que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a nécessairement $u_{n_i} \leqslant N$, donc $n_i \leqslant M$.

   On raisonne par l'absurde et on suppose de plus que le terme u_M ne figure pas dans la décomposition ci-dessus. Alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $n_i \neq M$, ce qui entraîne $n_i < M$. En particulier, on a $n_k + 1 \leqslant M$. Par conséquent, la question précédente donne

$$N \;=\; u_{n_1} + \ldots + u_{n_k} \;<\; u_{n_k+1} \;\leqslant\; u_M \;\leqslant\; N,$$

   donc $N < N$, et il y a contradiction. On a donc montré : $\boxed{\text{il existe } i \in [\![1, k]\!] \text{ tel que } u_{n_i} = u_M}$.

12. Montrons par récurrence forte sur N.
   - On a $1 = u_2$, donc la propriété est vraie au rang 1.
   - Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que la propriété est vraie aux rangs $1, \ldots, N-1$, *i.e.* tous les entiers $1, \ldots, N-1$ s'écrivent comme la somme de termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ distincts non consécutifs. Montrons la propriété au rang N.

     Comme ci-dessus, on note M le plus grand entier tel que $u_M \leqslant N$. Si $N = u_M$, le propriété est démontrée. Sinon, comme $u_M \geqslant 1$, on a $N - u_M \in [\![1, N-1]\!]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $N - u_M$ s'écrit

$$N - u_M \;=\; u_{n_1} + \ldots + u_{n_k}$$

avec $n_1, \ldots, n_k \in [\![2, +\infty[\![$ et $n_{i+1} > n_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$. Par conséquent,

$$N \;=\; u_{n_1} + \ldots + u_{n_k} + u_M.$$

Il reste à montrer que $M > n_k + 1$, et on aura bien montré la propriété au rang N. Supposons que $M \leqslant n_k + 1$, *i.e.* $n_k \geqslant M - 1$. Par croissance de la suite de Fibonacci, on a alors $u_{n_k} \geqslant u_{M-1}$. Ceci entraîne que

$$N \;\geqslant\; u_{n_k} + u_M \;\geqslant\; u_{M-1} + u_M \;=\; u_{M+1}.$$

Finalement, $N \geqslant u_{M+1}$ et il y a contradiction, car M est le plus grand entier tel que $u_M \leqslant N$.

Ainsi, $\boxed{\text{tout entier } N \in \mathbb{N}^\star \text{ s'écrit comme la somme de termes de la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ distincts non consécutifs}}$.

13. Montrons par récurrence forte que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, l'écriture $N = u_{n_1} + \ldots + u_{n_k}$ avec $n_1, \ldots, n_k \in [\![2, +\infty[\![$ et $n_{i+1} > n_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ est unique.
   - Si $N = 1$: on a $N = u_2$ et cette écriture est unique car pour tout entier $n > 2$, on a $u_n > 1$.
   - Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On suppose le résultat vrai pour les entiers $1, \ldots, N-1$. Par la question 11., on sait que u_M figure dans la décomposition de N, où M est le plus grand entier tel que $u_M \leqslant N$.

     Si $N = u_M$, l'écriture est unique car les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ sont strictement positifs.

     Sinon, comme $N - u_M \in [\![1, N-1$, l'hypothèse de récurrence entraîne que l'écriture de $N - u_M$ comme somme de termes de $(u_n)_{\geqslant 2}$ distincts non consécutifs est unique, ce qui donne l'unicité de l'écriture de N.

   Ainsi, $\boxed{\text{l'écriture de tout } N \in \mathbb{N}^\star \text{ comme somme de termes de la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ distincts non consécutifs est unique}}$.

a. On peut alternativement trouver directement les solutions en ayant recours à la forme canonique :

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{5}{4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x - \tfrac{1}{2} \in \left\{-\tfrac{\sqrt{5}}{2}, \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

⋆ ⋆ ⋆