DM 10

pour le 27.04.2026

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Dans tout ce problème, n désigne un entier non nul, a et b sont deux nombres réels. La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \tfrac{a+b}{2}\right)P.$$

Partie A – Etude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \left(X - \tfrac{a+b}{2}\right)P.$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Soit $\mathscr{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1)$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.
4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.
   a. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = \{X-a, X-b\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
   b. Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$ puis déduire $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_1)$.
   c. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_1$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$, notée $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}$.
   d. Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices $M, M_1, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}$ et $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}}$.
   e. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4d, une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).
5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble $\Gamma = \left\{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3, (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4\right\}$.
   a. Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   b. Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2.
   c. Déterminer une base de Γ.
6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5b, déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Partie B – Quelques généralités sur φ_n

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. On se propose dans cette question de déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$. On pose $\alpha = \max(a,b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.
   a. Démontrer que la fonction
   $$f : x \mapsto \frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$$
   est continue sur I.

b. Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

c. Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)} y = 0$$

d. On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$. Déduire de la question 8c. une base de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\varphi_{2p})$.

e. On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8c. une base de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (on pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Exercice 2. On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad G(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$$

Partie A : Etudes de deux fonctions

1. *a.* Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   b. Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0 . On notera encore F et G ces prolongements.

2. *a.* Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer leurs dérivées.

   b. Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0 . Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.

3. *a.* Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.

   b. Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$?

4. *a.* Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer sans calcul qu'il existe un réel $x_k \in]\, a_k, a_{k+1}\, [$ tel que $F'(x_k) = 0$.

   b. Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   c. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

   d. En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).

   e. Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star, x_k \in]\, a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.

   f. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k).

Partie B – Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Si f appartient à E, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \quad J_f(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Soit f une fonction appartenant à E.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis. On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.

6. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f.

7. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   a. Etablir que

   $$\forall x > 0, \quad I_f(x) + \mathrm{i}J_f(x) = \frac{f(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - f(0)}{\mathrm{i}x} - \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^1 f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

   b. Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0,1]$.
   On posera par la suite $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $M' = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

   c. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$tel que $\forall x > 0, |I_f(x) + \mathrm{i}J_f(x)| \leqslant \frac{A}{x}$.

d. A l'aide de la question 8c, calculer $\lim_{x \to +\infty} (I_f(x) + \mathrm{i}J_f(x))$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} J_f(x)$.

e. En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f, calculer $\lim_{x \to -\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} J_f(x)$.

8. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.

   a. Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

   b. Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leqslant |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).

   c. Soient x et y deux réels. Etablir que

   $$|I_f(x) - I_f(y)| \leqslant |x - y| \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

   d. En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.

9. A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie A, et les fonctions I_f et J_f de la partie B .