

DM 9

pour le 07.04.2026

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soit $u_0 \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[.$$

En déduire que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et déterminer sa somme.
3. Montrer que $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge.
4. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-a} - \ln n.$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

On pourra s'intéresser à la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.