

DM 9

Exercice 1. Soit $u_0 \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[.$$

En déduire que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et déterminer sa somme.
3. Montrer que $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge.
4. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

1. On montre par une rapide récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 1$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ .
On a donc $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $u_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^2$. Par conséquent, on en déduit que $\ell = \ell - \ell^2$, ce qui donne $\ell^2 = 0$, puis $\ell = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u_0,$$

car la somme obtenue est télescopique. Ceci montre la convergence de la série $\sum u_n^2$, dont la somme vaut u_0 .

3. On a

$$\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$$

or on sait que la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ est de même nature que la suite $(\ln(u_n))$, qui diverge (vers $-\infty$) car $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ceci donne bien la divergence de la série $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

4. On a :

$$\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln(1 - u_n) \sim -u_n, \quad \text{car } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ainsi, comme la série à termes positifs $-\sum \ln(1 - u_n)$ est divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-a} - \ln n.$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

On pourra s'intéresser à la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1-a} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1-a}{n}} - \left(\frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) - \left(\frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $u_{n+1} - u_n = O \left(\frac{1}{n^2} \right)$. Par conséquent, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge.

On sait par ailleurs que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ a même nature que la suite (u_n) , donc (u_n) converge.

Remarques :

— On pouvait aussi bien sûr alternativement écrire le terme d'ordre 2 dans le développement limité :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1-a}{n}} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{2a-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

et conclure de la même manière.

— Dans le cas $a = 0$, on retrouve l'existence de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.