

DM 8

pour le 13.03.2026

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Dans tout le sujet, on note E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui possèdent 2 comme racine de multiplicité au moins 2 :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(2) = P'(2) = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, et en donner une base et sa dimension.
2. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
3. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ P &\mapsto (P(2), P'(2)) \end{aligned}$$

- a. Montrer que φ est une application linéaire.
- b. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :
$$f(1) = 1, \quad f(X) = X^2, \quad f(X^2) = X, \quad f(X^3) = X^3.$$
 - a. Justifier que f est correctement défini.
 - b. Donner $f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$ pour $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$.
 - c. L'application f est-elle injective, surjective ?
5. Soient $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P\}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = -P\}$.
 - a. Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - b. Montrer que S et A sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
 - c. Écrire le polynôme $P = X^3 + 2X^2 - X + 2$ comme somme d'un élément de S et d'un élément de A .
6. Soit $F = \text{Vect}(1 + X^3, X, X^2)$.
 - a. Montrer que $A \subset F$.
 - b. Décrire les éléments de $F \cap S$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que $0_{\mathbb{R}[X]}$ est l'unique solution de l'équation

$$f(P) = \lambda P$$

d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$.