

DM 8

Dans tout le sujet, on note E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui possèdent 2 comme racine de multiplicité au moins 2 :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(2) = P'(2) = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, et en donner une base et sa dimension.
2. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
3. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ P &\mapsto (P(2), P'(2)) \end{aligned}$$

- a. Montrer que φ est une application linéaire.
- b. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(1) = 1, \quad f(X) = X^2, \quad f(X^2) = X, \quad f(X^3) = X^3.$$

- a. Justifier que f est correctement défini.
- b. Donner $f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$ pour $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$.
- c. L'application f est-elle injective, surjective ?
5. Soient $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P\}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = -P\}$.
 - a. Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - b. Montrer que S et A sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
 - c. Écrire le polynôme $P = X^3 + 2X^2 - X + 2$ comme somme d'un élément de S et d'un élément de A .
6. Soit $F = \text{Vect}(1 + X^3, X, X^2)$.
 - a. Montrer que $A \subset F$.
 - b. Décrire les éléments de $F \cap S$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que $0_{\mathbb{R}[X]}$ est l'unique solution de l'équation

$$f(P) = \lambda P$$

d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

1. On sait que $P \in \mathbb{R}_3[X]$ a pour racine 2 avec $m_2(P) \geq 2$ si et seulement s'il est de la forme $P = (X - 1)^2 Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi,

$$E = \{(X - 1)^2(aX + b), a, b \in \mathbb{R}\} = \{aX(X - 1)^2 + b(X - 1)^2, a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X(X - 1)^2, (X - 1)^2).$$

La famille $(X(X - 1)^2, (X - 1)^2)$ est alors génératrice de E , et libre car elle est échelonnée en degré. Il s'agit donc d'une base de E , et $\dim E = 2$.

2.
 - On sait que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$, donc $\dim E + \dim \mathbb{R}_1[X] = \dim \mathbb{R}_3[X]$.
 - Si $P \in E \cap \mathbb{R}_1[X]$, alors $\deg P \leq 1$ et P a deux racines comptées avec leur multiplicité, donc P est nul.

Finalement, $E \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et $\dim E + \dim \mathbb{R}_1[X] = \dim \mathbb{R}_3[X]$ donc $E \oplus \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}_3[X]$

3. a. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(2), (\lambda P + Q)'(2)) = (\lambda P(2) + Q(2), \lambda P'(2) + Q'(2)) = \lambda(P(2), P'(2)) + (Q(2), Q'(2)).$$

Ainsi, $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$, et φ est linéaire.

- b. On a $\text{Ker } \varphi = \{P \in E, P(2) = P'(2) = 0\} = E$.

Par ailleurs, $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$: si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors en posant $P = bX + a - 2b$, on a $P(2) = a$ et $P'(2) = b$, donc $\varphi(P) = (a, b)$. Finalement, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ a un antécédent par φ , et φ est surjective.

On pouvait aussi remarquer que $\dim \ker \varphi = \dim E = 2$, donc $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim E = 2$ par le théorème du rang. Comme $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}_2[X]$, on a finalement $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$.

4. a. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ. Comme $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, f est correctement définie.
b. Par linéarité, on a

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_0f(1) + a_1f(X) + a_2f(X^2) + a_3f(X^3) = a_0 + a_2X + a_1X^2 + a_3X.$$

- c. On s'intéresse à l'image de la base canonique que $\mathbb{R}_3[X]$: on a $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = (1, X^2, X, X^3)$. Comme $((1, X^2, X, X^3))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut alternativement remarquer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(f(P)) = P$, donc $f \circ f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, et f est bijective.

5. a. On a $S = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$ et $A = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$, donc S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
On peut aussi bien sûr vérifier que le polynôme nul appartient à S et A , et qu'ils sont stables par combinaison linéaire.
b. Montrons que $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, montrons que P s'écrit de manière unique sous la forme $P = P_S + P_A$ avec $P_S \in S$ et $P_A \in A$.

– Supposons que $P = P_S + P_A$ avec $P_S \in S$ et $P_A \in A$. Alors $f(P) = f(P_S) + f(P_A) = P_S - P_A$. Alors

$$\begin{cases} P &= P_S + P_A \\ f(P) &= P_S - P_A \end{cases}$$

Nécessairement, on a alors $P_S = \frac{1}{2}(P + f(P))$ et $P_A = \frac{1}{2}(P - f(P))$.

- Si $P_S = \frac{1}{2}(P + f(P))$ et $P_A = \frac{1}{2}(P - f(P))$, on a $P = P_S + P_A$, et $f(P_S) = \frac{1}{2}(f(P) + P) = P_S$ donc $P_S \in S$, puis $f(P_A) = \frac{1}{2}(f(P) - P) = -P_A$ donc $P_A \in A$.

On a donc montré $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$.

On peut aussi bien sûr remarquer directement que comme $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, f est une symétrie, donc $\mathbb{R}_3[X] = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$, soit $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$.

- c. D'après ce qui précède, on a $P = P_S + P_A$, avec $P_S = \frac{1}{2}(2X^3 + X^2 + X + 4)$ et $P_A = \frac{3}{2}(X^2 - X)$.

6. a. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in A$. On a $a_0 + a_2X + a_1X^2 + a_3X^3 = -a_0 - a_1X - a_2X^2 - a_3X^3$. Par conséquent, $a_0 = a_3 = 0$ et $a_1 = -a_2$. Ainsi, $P = a_1X - a_1X^2 \in \operatorname{Vect}(1 + X^2, X, X^2)$.
b. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Si $P \in F \cap S$, alors P s'écrit $P = a(1 + X^3) + bX + cX^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ du fait que $P \in S$. Comme $P \in S$, on a de plus $b = c$. Finalement, $P = a(1 + X^3) + b(X + X^2)$, et $P \in \operatorname{Vect}(1 + X^3, X + X^2)$. Réciproquement, si $P \in \operatorname{Vect}(1 + X^3, X + X^2)$, on a $P \in F \cap S$, ce qui donne $F \cap S = \operatorname{Vect}(1 + X^3, X + X^2)$.
7. Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, alors

$$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow aX^3 + cX^2 + bX + d = \lambda(aX^3 + bX^2 + cX + d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda a \\ c = \lambda b \\ b = \lambda c \\ d = \lambda d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)a = 0 \\ c = \lambda b \\ (1 - \lambda^2)b = b \\ (1 - \lambda)d = 0 \end{cases}$$

Comme $\lambda \notin \{-1, 1\}$, ceci entraîne que $a = b = d = 0$, puis $c = 0$. Ainsi, $f(P) = \lambda P$ si et seulement si P est nul.