

DM 7

pour le 09.02.2026

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$

existe et est non nulle.

3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pourra avoir recours au lemme de Cesàro.

Exercice 2. Soit la fonction

$$f : x \mapsto e^x + x$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée x_n .
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim \ln n$.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ln n$.