

DM 7

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$

existe et est non nulle.

3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pourra avoir recours au lemme de Cesàro.

1. Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, puis

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} > 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante. Si la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, on sait que qu'elle converge vers un point fixe de la fonction continue $f : x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$. Comme f n'a pas de point fixe, on en déduit que (u_n) n'est pas convergente, donc elle diverge vers $+\infty$.

2. Comme $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a :

$$u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{u_n^3}\right)\right).$$

Donc $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \alpha u_n^{\alpha-3} + o(u_n^{\alpha-3})$. En choisissant $\alpha = 3$, on obtient alors

$$u_{n+1}^3 - u_n^3 \sim 3.$$

3. On a alors par le lemme de Cesàro : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^3 - u_k^3 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3$. Ainsi,

$$\frac{1}{n}(u_n^3 - a^3) \sim 3, \quad \text{puis} \quad u_n^3 - a^3 \sim 3n.$$

Comme $u_n^3 - a^3 \sim u_n^3$, on a $u_n^3 \sim 3n$, puis $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

Exercice 2. Soit la fonction

$$f : x \mapsto e^x + x$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée x_n .
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim \ln n$.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ln n$.

1. La fonction $f : x \mapsto x + e^x$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions. Ainsi, le théorème de la bijection assure qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R})$.

Comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ainsi, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et chaque entier $n \in \mathbb{N}$ a un unique antécédent x_n par f , ce qui conclut.

2. 1ère rédaction : on sait que la bijection réciproque f^{-1} de f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,

donc $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi,

$$x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2ème rédaction : pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$, on a $f(x_{n+1}) > f(x_n)$. Par stricte croissance de f , on obtient donc $x_{n+1} > x_n$. Nous avons montré que $(x_n)_n$ est croissante.

La suite diverge vers $+\infty$, car sinon, par croissance, elle converge vers un réel ℓ , et donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. C'est une contradiction car $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. Pour tout n , $x_n > 0$, et on a

$$\ln(e^{x_n} + x_n) = \ln n.$$

Ainsi, $\ln(e^{x_n}) + \ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) = \ln n$, c'est-à-dire

$$x_n = \ln n - \ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) \sim \ln n,$$

car $\frac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

N.B. : ne pas écrire $e^{x_n} = \ln n + \ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right)$, car on ne sait pas (encore) comparer x_n et n .

4. D'après ce qui précède,

$$x_n - \ln n = -\ln\left(1 + \frac{x_n}{e^{x_n}}\right) \sim -\frac{x_n}{e^{x_n}}$$

car $\frac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, $x_n - \ln n \sim -\frac{\ln n}{n}$ car $e^{x_n} \sim n$.

On a obtenu le développement asymptotique à 2 termes :

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$