DM 6

pour le 05.01.2026

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur de m.

$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = & m \\ mx & -m^2y & +mz & = & 1 \\ mx & +y & -m^2z & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 2. **Sous-groupes de $\mathbb{R}$.** On souhaite montrer que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, alors :

- soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$,
- soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on fixe un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
3. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   a. Dans cette question, nous allons montrer que $a \in G$. On raisonne par l'absurde, et on suppose que $a \notin G$.
      i. Justifier qu'il existe $b, c \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tels que $a < b < c < 2a$.
      ii. Justifier que $0 < c - b < a$, et conclure à une contradiction.
   b. Montrer que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   c. Nous cherchons à montrer l'autre inclusion : $G \subset a\mathbb{Z}$. On considère $x \in G$, et on pose $n = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$.
      i. Montrer que $0 \leqslant x - na < a$.
      ii. En déduire que $x = na$ et conclure.
4. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
   a. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
      i. Justifier qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tel que $0 < g < y - x$.
      ii. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in]x, y[$.
   b. Déduire de ce qui précède que si $a = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

On a donc montré :
- **si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$,**
- **si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.**

5. **Application.** On note $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   a. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
   b. En utilisant le résultat prouvé ci-dessus, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. **Une autre preuve de Bolzano-Weierstrass.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle. On pose

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n,\ u_k < u_n\}.$$

1. On suppose que A est infini. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ possède une sous-suite décroissante.
2. On suppose que A est fini. Construire une sous-suite croissante de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. En déduire que toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f \;:\; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{sinon, où } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

Déterminer les points de continuité de f.
