DM 5

pour le 24.11.2025

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on note

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n\ln x \end{array}$$

1. *a.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n, avec $u_n < v_n$. Vérifier que
$$\forall n \geqslant 3, \quad 0 < u_n < n < v_n.$$
   b. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *a.* Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < \mathrm{e}$.
   b. Pour tout $n \geqslant 3$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   c. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente, puis établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2. *Homographies de $\mathbb{C}$*

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifient $ad - bc \neq 0$, on dit que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C},\ cz + d = 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

est une *homographie*.

Un exemple

On introduit l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\mathrm{i}z+\mathrm{i}}{-z+1} \end{array}$$

1. Justifier que h est une homographie, et montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, on a $h(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que h est injective.
3. Déterminer les nombres complexes $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $h(z) = w$ ait au moins une solution. L'application h est-elle surjective ? En déduire une partie F de $\mathbb{C}$ telle que h définisse une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur F.

Homographies conservant $\mathbb{U}$

Dans cette partie, on cherche à déterminer toutes les homographies h de $\mathbb{C}$ telles que h est bien définie sur $\mathbb{U}$, et :

$$\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \text{ existe et } h(z) \in \mathbb{U}. \qquad (\mathscr{P})$$

On dit alors que h *conserve* $\mathbb{U}$.

4. *Préliminaire.* Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'^2| + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z}')$.
5. *Deux types d'homographies conservant* $\mathbb{U}$.

a. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
$$h : z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z} \tag{1}$$
définit une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$. On dira alors que h est une homographie de type (1).

b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
$$h : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1} \tag{2}$$
définit une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$. On dira alors que h est une homographie de type (2).
On pourra (par exemple) utiliser la question 4.

6. On cherche à montrer dans cette question que toutes les homographies conservant $\mathbb{U}$ sont soit de type (1), soit de type (2).
On considère $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On suppose que
$$h \ : \ z \ \mapsto \ \frac{az+b}{cz+d}$$
est une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
   a. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
   $$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \ = \ |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\bar{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$
   b. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que :
   $$\text{si pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\,\mathfrak{Re}(v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0, \quad \text{alors } u = v = 0.$$
   Déduire alors de la question précédente que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $a\bar{b} = c\bar{d}$.
   c. Si $a = 0$, montrer que h est une homographie de type (1).
   d. On suppose désormais que $a \neq 0$. Montrer que
   $$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) \ = \ 0.$$
   e. Montrer que si $|a| = |c|$, alors $ad - bc = 0$. Qu'en déduire dans ce cas ?
   f. Montrer que si $|a| = |d|$, alors h est une homographie de type (2), et conclure.