DM 5

Exercice 1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on note

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n \ln x \end{array}$$

1. *a.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n, avec $u_n < v_n$. Vérifier que
$$\forall n \geqslant 3, \quad 0 < u_n < n < v_n.$$
   b. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. *a.* Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < \mathrm{e}$.
   b. Pour tout $n \geqslant 3$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \geqslant 3}$.
   c. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente, puis établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

1. *a.* La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x}$.
   Le signe de f_n sur $\mathbb{R}_+^\star$ donne la stricte décroissance de f_n sur $]0, n]$ et la stricte croissance de f_n sur $[n, +\infty[$. Ainsi :
   – Comme f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, n[$, on en déduit qu'elle définit une bijection de $]0, n[$ sur son ensemble image $J_1 =]n(1 - \ln n), +\infty[$. Comme $0 \in J_1$, 0 admet un unique antécédent u_n par f_n dans $]0, n[$.
   – Comme f_n est continue et strictement croissante sur $]n, +\infty[$, on en déduit qu'elle définit une bijection de $]n, +\infty[$ sur son ensemble image J_2. On a
   $$f_n(x) = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
   donc $J_2 =]n(1 - \ln n), +\infty[$. Comme $0 \in J_2$, 0 admet un unique antécédent v_n par f_n dans $]n, +\infty[$.
   On a donc bien $0 < u_n < n < v_n$ pour tout $n \geqslant 3$.
   b. Comme pour tout $n \geqslant 3$, $v_n > n$, on déduit par majoration que $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. *a.* Pour tout $n \geqslant 3$, on a $f_n(1) = 1$ et $f_n(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - n < 0$, on déduit de
   $$f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(\mathrm{e})$$
   et de la stricte décroissance de f_n que $1 < u_n < \mathrm{e}$.
   b. On sait que $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$, donc
   $$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}).$$
   Comme $u_{n+1} > 1$, on a $\ln(u_{n+1}) > 0$, donc
   $$f_n((u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n).$$
   La décroissance de f_n sur $]0, n[$ entraîne alors que $u_{n+1} < u_n$. On a donc montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   c. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 1), elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$. Supposons que $\ell > 1$, on a alors
   $$n\ln(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{donc} \quad u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
   car $\ln \ell > 0$, et $u_n = n\ln(u_n)$. Ceci est une contradiction. On en déduit que $\ell = 1$.

Exercice 2. *Homographies de $\mathbb{C}$*

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifient $ad - bc \neq 0$, on dit que l'application

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C},\ cz + d = 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

est une *homographie*.

Un exemple

On introduit l'application

$$h\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\mathrm{i}z+\mathrm{i}}{-z+1} \end{array}$$

1. Justifier que h est une homographie, et montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, on a $h(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que h est injective.
3. Déterminer les nombres complexes $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $h(z) = w$ ait au moins une solution. L'application h est-elle surjective ? En déduire une partie F de $\mathbb{C}$ telle que h définisse une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur F.

Homographies conservant $\mathbb{U}$

Dans cette partie, on cherche à déterminer toutes les homographies h de $\mathbb{C}$ telles que h est bien définie sur $\mathbb{U}$, et :

$$\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \text{ existe et } h(z) \in \mathbb{U}. \tag{$\mathscr{P}$}$$

On dit alors que h *conserve* $\mathbb{U}$.

4. *Préliminaire.* Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'^2| + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z}')$.
5. *Deux types d'homographies conservant* $\mathbb{U}$.
   a. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
   $$h : z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z} \tag{1}$$
   définit une homographie qui vérifie la propriété ($\mathscr{P}$). On dira alors que h est une homographie de type (1).
   b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
   $$h : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1} \tag{2}$$
   définit une homographie qui vérifie la propriété ($\mathscr{P}$). On dira alors que h est une homographie de type (2).
   On pourra (par exemple) utiliser la question 4.
6. On cherche à montrer dans cette question que toutes les homographies conservant $\mathbb{U}$ sont soit de type (1), soit de type (2).
   On considère $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On suppose que
   $$h\ :\ z\ \mapsto\ \frac{az+b}{cz+d}$$
   est une homographie qui vérifie la propriété ($\mathscr{P}$).
   a. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
   $$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ =\ |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\bar{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$
   b. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que :
   $$\text{si pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\,\mathfrak{Re}(v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0, \quad \text{alors } u = v = 0.$$
   Déduire alors de la question précédente que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $a\bar{b} = c\bar{d}$.
   c. Si $a = 0$, montrer que h est une homographie de type (1).

d. On suppose désormais que $a \neq 0$. Montrer que
$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0.$$

e. Montrer que si $|a| = |c|$, alors $ad - bc = 0$. Qu'en déduire dans ce cas ?

f. Montrer que si $|a| = |d|$, alors h est une homographie de type (2), et conclure.

1. L'application h est de la forme de l'énoncé avec $a = b = \mathrm{i}$, $c = -1$ et $d = 1$, donc $ad - bc = 2\mathrm{i} \neq 0$, et h est bien une homographie. Si $z \in \mathbb{U}$ et $z \neq 1$, on a
$$h(z) = \frac{(\mathrm{i}z + \mathrm{i})(-\bar{z} + 1)}{(-z + 1)(-\bar{z} + 1)} = \frac{-\mathrm{i}z\bar{z} + \mathrm{i}(z - \bar{z}) + \mathrm{i}}{|1 - z|^2} = \frac{-\mathrm{i}|z|^2 - 2\,\mathfrak{Im}(z) + \mathrm{i}}{|1 - z|^2} = -\frac{2\,\mathfrak{Im}(z)}{|1 - z|^2},$$
car $|z| = 1$. Ainsi, $h(z) \in \mathbb{R}$.

2. Soient $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On suppose que $h(z) = h(z')$, c'est-à-dire
$$(\mathrm{i}z + \mathrm{i})(-z' + 1) = (\mathrm{i}z' + \mathrm{i})(-z + 1), \quad \text{ou encore} \quad -\mathrm{i}zz' + \mathrm{i}(z - z') + \mathrm{i} = -\mathrm{i}zz' + \mathrm{i}(z' - z) + \mathrm{i}.$$
On en déduit que $2\mathrm{i}(z - z') = 0$, donc $z = z'$. La fonction h est alors injective.

3. Soit $w \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a
$$h(z) = w \iff (\mathrm{i}z + \mathrm{i}) = w(1 - z) \iff z(\mathrm{i} + w) = w - \mathrm{i}.$$
Par conséquent, l'équation a une unique solution si $w \neq -\mathrm{i}$, et n'a pas de solution sinon. On en déduit :
   - que h n'est pas surjective car $-\mathrm{i}$ n'a pas d' antécédent,
   - que h est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$.

4. On a : $|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z'}) = z\bar{z} + z\bar{z'} + \bar{z}z' + z'\bar{z'} = |z|^2 + z\bar{z'} + \overline{z\bar{z'}} + |z'|^2 = |z|^2 + |z'^2| + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z'})$.

5. *a.* L'application est de la forme de l'énoncé avec $a = 0$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $c = 1$ et $d = 0$, donc $ad - bc = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$, donc h est bien une homographie.

   Par ailleurs, si $z \in \mathbb{U}$, on a $z \neq 0$ donc $h(z)$ est bien défini, et $|h(z)| = \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}{|z|} = 1$.

   b. L'application est de la forme de l'énoncé avec $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $c = \bar{\alpha}$ et $d = 1$, donc h est bien une homographie, car $ad - bc = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \alpha\bar{\alpha}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - |\alpha|^2) \neq 0$, du fait que $|\alpha| \neq 1$.

   Par ailleurs,
   - si $\alpha = 0$, l'application h est définie sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{U}$,
   - si $\alpha \neq 0$, alors h est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\bar{\alpha}}\}$ donc sur $\mathbb{U}$ car $\left|-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right| \neq 1$ donc $-\frac{1}{\bar{\alpha}} \notin \mathbb{U}$.

   Si $z \in \mathbb{U}$, on a
$$|h(z)|^2 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,\frac{|z|^2 + |\alpha|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})}{|\bar{\alpha}z|^2 + 1 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})} = \frac{1 + |\alpha|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})}{|\bar{\alpha}|^2 + 1 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})} = 1,$$
   car $|z| = 1$ et $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$.

   N.B. : on pouvait aussi remarquer que comme $|\bar{z}| = 1$, on a $|h(z)| = \frac{|z+\alpha|}{|\bar{\alpha}z+1|\,|\bar{z}|} = \frac{|z+\alpha|}{|\bar{\alpha}+\bar{z}|} = 1$ car $\overline{z + \alpha} = \bar{\alpha} + \bar{z}$.

6. *a.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$, donc comme h vérifie $(\mathscr{P})$, on a $|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + b| = |c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + d|$, donc $|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + b|^2 = |c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + d|^2$. La question 4 donne alors :
$$|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bar{b}) = |c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bar{d})$$
   d'où $|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\bar{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

   b. On suppose que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $u + 2\,\mathfrak{Re}(v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0$.

   En choisissant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, puis $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on obtient
$$\begin{cases} u + 2\,\mathfrak{Re}\,v = 0 & (1) \\ u - 2\,\mathfrak{Re}\,v = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} u + 2\,\mathfrak{Re}(\mathrm{i}v) = 0 \\ u + 2\,\mathfrak{Re}(-\mathrm{i}v) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u - 2\,\mathfrak{Im}\,v = 0 & (3) \\ u + 2\,\mathfrak{Im}\,v = 0 & (4) \end{cases}$$
   En sommant (1) et (2), on déduit que $\mathfrak{Re}\,v = 0$. En sommant (3) et (4), on déduit que $\mathfrak{Im}\,v = 0$. Finalement, $v = 0$, donc $u = 0$.

   La question précédente donne : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 - (|c|^2 + |d|^2) + 2\,\mathfrak{Re}((a\bar{b} - c\bar{d})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0$. En appliquant ce qui précède à $u = |a|^2 + |b|^2 - (|c|^2 + |d|^2)$ et $v = a\bar{b} - c\bar{d}$, on obtient $u = v = 0$, donc $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $a\bar{b} = c\bar{d}$.

c. Si $a = 0$, on a $c\bar{d} = 0$ d'après la question précédente. Comme $ad - bc \neq 0$, on a $bc \neq 0$, donc $c \neq 0$, ce qui entraîne que $d = 0$. Finalement, h est de la forme

$$h : z \mapsto \frac{b}{cz}$$

Comme $|b|^2 = |c|^2$, on a $\left|\frac{b}{c}\right| = 1$, donc $\frac{b}{c}$ s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un réel $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $h : z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z}$, et h est de type (1).

d. On a $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = |a|^4 - |ad|^2 - |ca|^2 + |cd|^2$.

Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, on a $|ab|^2 = |cd|^2$, donc

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = |a|^4 - |ad|^2 - |ca|^2 + |ab|^2 = |a|^2(|a|^2 - |d|^2 - |c|^2 + |b|^2) = 0$$

d'après la question 6b.

e. Si $|a| = |c|$, alors $c+ \neq 0$, et on a $\frac{a}{c} \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, on en déduit que $c\bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = c\bar{d}$. Comme $c \neq 0$, on a $b = d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Ansi, $ad - bc = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}d - d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}c = 0$. On en déduit que dans ce cas h n'est pas une homographie, donc ce cas est impossible.

f. Si $|a| = |d|$, alors comme ci-dessus il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{d} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$,

$$h(z) = \frac{a}{d}\,\frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1}.$$

On pose $\alpha = \frac{b}{a}$. Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, on a alors $\frac{c}{d} = \frac{a\bar{b}}{d\bar{d}} = \frac{a\bar{b}}{|d|}$. L'égalité $a = \frac{|a|}{\bar{a}}$ donne ensuite $\frac{c}{d} = \frac{|a|}{|d|}\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \bar{\alpha}$.

Par ailleurs, on déduit aussi de $a\bar{b} = c\bar{d}$ que $|b| = |c|$, donc si $\alpha = \frac{b}{a} \in \mathbb{U}$, on a $|a| = |b| = |c|$, ce qui est impossible d'après la question précédente. On a donc bien montré que l'homographie h est de type (2).