DM 4

pour le 03.11.2025

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soient f et g les applications définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Expliciter les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 2. On introduit la fonction polynomiale :

$$P : z \mapsto \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((z+\mathrm{i})^5 - (z-\mathrm{i})^5\right).$$

1. *a.* Résoudre sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ l'équation $\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5 = 1$.

   b. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. *On pensera à la technique de l'angle moitié.*
2. *a.* En développant, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 5z^4 - 10z^2 + 1$.

   b. Déterminer les racines de P par une autre méthode qu'en question 1.
3. On définit la fonction cotan : $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

   a. Montrer que $\operatorname{cotan} \frac{\pi}{5} > 1$.

   b. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\operatorname{cotan} \frac{\pi}{5}$.

Exercice 3.

1. Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} |u| = |v| = 1, \\ u + v = -1. \end{cases}$$

2. À l'aide de la question précédente, trouver tous les triplets $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} |u| = |v| = |w| = 1, \\ u + v + w = 0. \end{cases}$$

   Que dire alors des points du plan d'affixes respectifs u, v, w ?
3. Soient k un entier qui n'est pas un multiple de 3 et $\theta, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ et k tels que $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{i\psi} = 0$. Calculer

$$\mathrm{e}^{ki\theta} + \mathrm{e}^{ki\varphi} + \mathrm{e}^{ki\psi}.$$

Pour compléter, possibilité de traiter les exercices : **TD 7 : Ex 5**, **TD 5 : Ex 10**, **TD 2 : Ex 7**.
