DM 4

Exercice 1. Soient f et g les applications définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Les applications f et g sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Expliciter les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. L'application f est injective : soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(m)$, on a alors $2n = 2m$, donc $n = m$.
   En revanche, f n'est pas surjective : par exemple, $1 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par f : si $f(n) = 1$, alors $n = \frac{1}{2}$, mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Par conséquent, f n'est pas bijective.
   L'application g n'est pas injective : par exemple $g(0) = g(1) = 0$. Par conséquent, g n'est pas bijective.
   En revanche, g est surjective : si $m \in \mathbb{N}$, on a $g(2m) = m$ donc m a un antécédent par g.
2. On a $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array}$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, et $g \circ f$ est bijective.
   On a $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$
   Ainsi, $f \circ g$ n'est pas injective ($f \circ g(0) = f \circ g(1) = 0$), ni surjective ($1$ n'a pas d'antécédent par $f \circ g$).

Exercice 2. On introduit la fonction polynomiale :

$$P : z \mapsto \frac{1}{2\mathrm{i}} \left((z+\mathrm{i})^5 - (z-\mathrm{i})^5 \right).$$

1. *a.* Résoudre sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ l'équation $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \right)^5 = 1$.
   b. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. *On pensera à la technique de l'angle moitié.*
2. *a.* En développant, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 5z^4 - 10z^2 + 1$.
   b. Déterminer les racines de P par une autre méthode qu'en question 1.
3. On définit la fonction cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   a. Montrer que $\operatorname{cotan} \frac{\pi}{5} > 1$.
   b. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\operatorname{cotan} \frac{\pi}{5}$.

1. *a.* Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$. On a $\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5 = 1$ si et seulement si $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ est racine 5-ème de l'unité. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \right)^5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0,4]\!],\ \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0,4]\!],\ z+\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0,4]\!],\ z\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1\right) = \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1\right). \end{aligned}$$

   On remarque que si $k = 0$, on ne peut pas avoir $z\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1\right) = \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1\right)$. Finalement,

$$\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \right)^5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1,4]\!],\ z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}-1},\ k \in [\![0,4]\!] \right\}$.

b. Pour $k \in [\![1,4]\!]$, on a

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}-1} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}\left(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}\left(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{5}}\right)} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{2\cos\frac{k\pi}{5}}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{5}} \;=\; \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{5}.$$

Par ailleurs, si $z \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$, alors $P(z)=0 \;\Leftrightarrow\; (z+\mathrm{i})^5=(z-\mathrm{i})^5 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5=1$. Comme de plus $P(\mathrm{i})\neq 0$, les solutions de $P(z)=0$ sont exactement les solutions de $\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5=1$, c'est-à-dire $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{3\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{4\pi}{5}$.

2. *a.* Par la formule du binôme de Newton, on a pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$2\mathrm{i}\,P(z) \;=\; \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\mathrm{i}^k z^{5-k} - \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-\mathrm{i})^k z^{5-k} \;=\; \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} z^{5-k}\,\mathrm{i}^k\left(1-(-1)^k\right)$$

Donc $P(z) \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\binom{5}{1}2\mathrm{i}z^4+\binom{5}{3}2\mathrm{i}^3z^2+\binom{5}{5}2\mathrm{i}^5\right) \;=\; 5z^4-10z^2+1$.

b. Les racines du polynôme $Q(X)=5X^2-10X^2+1$ sont $1+\frac{2}{\sqrt5}$ et $1-\frac{2}{\sqrt5}$. Comme z est racine de P si et seulement si z^2 est racine de Q, on en déduit les 4 racines de P, qui sont réelles :

$$-\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt5}},\ -\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt5}},\ \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt5}},\ \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt5}}.$$

3. *a.* Comme $\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$, on a $\tan\frac{\pi}{5}<\tan\frac{\pi}{4}=1$ par stricte croissance de la fonction tan sur $[0,\frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}>1$.

b. On sait que $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$ est l'une des racines de P. Comme $\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt5}}$ est l'unique racine supérieure à 1, on en déduit que $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}=\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt5}}$.

Exercice 3.

1. Trouver tous les couples $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} |u|=|v|=1,\\ u+v=-1.\end{cases}$$

2. À l'aide de la question précédente, trouver tous les triplets $(u,v,w)\in\mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} |u|=|v|=|w|=1,\\ u+v+w=0.\end{cases}$$

Que dire alors des points du plan d'affixes respectifs u,v,w ?

3. Soient k un entier qui n'est pas un multiple de 3 et $\theta,\varphi,\psi\in\mathbb{R}$ et k tels que $\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{i\psi}=0$. Calculer

$$\mathrm{e}^{ki\theta}+\mathrm{e}^{ki\varphi}+\mathrm{e}^{ki\psi}.$$

1. *Analyse.* Si (u,v) est solution du problème, on écrit u et v sous leur forme algébrique : $u=x+\mathrm{i}y$ et $v=x'+\mathrm{i}y'$. On a alors $x+x'=-1$ et $y+y'=0$, donc $x'=-x-1$ et $y'=-y$. Par ailleurs, $1=x^2+y^2=(-x-1)^2+(-y)^2$, ce qui entraîne que $x^2=(x+1)^2$, donc $2x+1=0$, et $x=-\frac12$.

Par conséquent, on a $x'=-x-1=-\frac12$. Comme u est de module 1, on en déduit que $y\in\left\{-\frac{\sqrt3}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right\}$.

Finalement, (u,v) est alors l'un des deux couples $(\mathrm{j},\mathrm{j}^2)$, $(\mathrm{j}^2,\mathrm{j})$.

Synthèse. Réciproquement, les deux couples ci-dessus sont clairement solutions du problème.

2. *Analyse.* Si (u,v,w) est un triplet solution, alors u est non nul, et on a $u\left(1+\frac{v}{u}+\frac{w}{u}\right)=0$, donc $\frac{v}{u}+\frac{w}{u}=-1$. Comme par ailleurs $\frac{v}{u}$ et $\frac{w}{u}$ sont de module 1, on sait alors par la question 1 que $\left(\frac{v}{u},\frac{w}{u}\right)\in\{(\mathrm{j},\mathrm{j}^2),(\mathrm{j}^2,\mathrm{j})\}$. Ainsi, on a $(u,v,w)=(u,\mathrm{j}u,\mathrm{j}^2u)$, ou $(u,v,w)=(u,\mathrm{j}^2u,\mathrm{j}u)$.

Synthèse. Réciproquement, tout triplet de la forme $(u, \mathrm{j}u, \mathrm{j}^2u)$, ou $(u, \mathrm{j}^2u, \mathrm{j}u)$ avec $u \in \mathbb{U}$ est solution, car $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

Interprétation géométrique. Si (u, v, w) est un triplet solution du problème, alors les points d'affixes respectives u, v, w sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

3. D'après la question précédente, le triplet $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})$ peut s'écrire sous la forme $(u, \mathrm{j}u, \mathrm{j}^2u)$, avec $u \in \mathbb{U}$ (quitte à permuter). On a alors
$$\mathrm{e}^{ki\theta} + \mathrm{e}^{ki\varphi} + \mathrm{e}^{ki\psi} \;=\; u^k + (\mathrm{j}u)^k + (\mathrm{j}^2u)^k \;=\; u^k\left(1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}\right).$$
Or si $k \equiv 1$ [3], on peut écrire $k = 3a+1$ avec $a \in \mathbb{Z}$, donc $\mathrm{j}^k = \mathrm{j}^{3a+1} = (\mathrm{j}^3)^a\,\mathrm{j} = \mathrm{j}$, et $\mathrm{j}^{2k} = (\mathrm{j}^3)^{2a}\,\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^2$, donc
$$\mathrm{e}^{ki\theta} + \mathrm{e}^{ki\varphi} + \mathrm{e}^{ki\psi} \;=\; u^k(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2) \;=\; 0.$$
De même, si $k \equiv 2$ [3], on a $\mathrm{j}^k = \mathrm{j}^2$ et $\mathrm{j}^{2k} = \mathrm{j}$, donc on a aussi $\mathrm{e}^{ki\theta} + \mathrm{e}^{ki\varphi} + \mathrm{e}^{ki\psi} \;=\; u^k(1+\mathrm{j}^2+\mathrm{j}) \;=\; 0$.