

**DM 3****1** *Les fonctions hyperboliques et la fonction argsh.*

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ .
2. Montrer que  $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$  et  $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$ .
3. Étudier les fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ , et tracer leurs graphes respectifs.
4. Montrer que la fonction  $\operatorname{sh}$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On notera  $\operatorname{argsh}$  sa bijection réciproque.
5. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

6. Justifier que  $\operatorname{argsh}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

7. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$