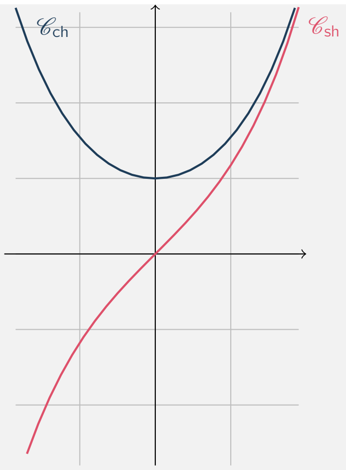
DM 3

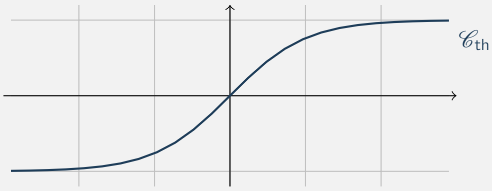
1 *Les fonctions hyperboliques et la fonction argsh.*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. Montrer que $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
3. Étudier les fonctions ch et sh, et tracer leurs graphes respectifs.
4. Montrer que la fonction sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On notera argsh sa bijection réciproque.
5. Montrer que pout tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}.$$
6. Justifier que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

1. Vu en cours : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = e^{-x}e^{x} = 1$.
2. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} x.$$
D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}'(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}, \quad \text{et} \quad \operatorname{th}'(x) = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$
3. La fonction ch est paire, et les fonctions sh et th sont impaires. On peut donc restreindre l'étude de ces fonctions à $\mathbb{R}_+$.
   - Comme $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, ch est deux fois dérivable, et $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}$ est positive, donc ch est convexe sur $\mathbb{R}_+$. On a par ailleurs
   $$\operatorname{ch}'(0) = \operatorname{sh}(0) = 0, \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   - Comme $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, sh est deux fois dérivable, et $\operatorname{sh}'' = \operatorname{ch}$ est positive, donc sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$. On a par ailleurs
   $$\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1, \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   - Comme th' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, th est deux fois dérivable, et $\operatorname{th}'' = -2\operatorname{th}'\operatorname{th}$ est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc th est concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus,
   $$\operatorname{th}'(0) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(0)} = 1, \quad \text{et} \quad \operatorname{th} x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Par parité et imparité, on obtient les courbes suivantes.





4. La fonction sh est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $\mathbb{R}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question 1, on a
$$\operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh}(x)) \;=\; 1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(x)) \;=\; 1+(\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)))^2 \;=\; 1+x^2.$$
En composant par la fonction racine carrée (les termes étant positifs), on obtient $|\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))| \;=\; \sqrt{1+x^2}$. Comme $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) \geqslant 0$, on a bien le résultat.
6. La fonction sh' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivation de la bijection réciproque, la fonction argsh est dérivable sur $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{argsh}'(x) \;=\; \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh}(x))} \;=\; \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
7. *1ère méthode.* On note $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) \;=\; \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \;=\; \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Ainsi, on a $f' = \operatorname{argsh}'$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = \operatorname{argsh} + c$. Comme $f(0) = 0$ et $\operatorname{argsh}(0) + c = c$, on en déduit que $c = 0$, donc $f = \operatorname{argsh}$.

   2ème méthode. Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout l'équation $\operatorname{sh} x = y$, on aura alors $x = \operatorname{argsh} y$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$y \;=\; \operatorname{sh} x \;\Leftrightarrow\; 2y \;=\; \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \;\Leftrightarrow\; 2y\mathrm{e}^x \;=\; \mathrm{e}^{2x} - 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 \;=\; 0,$$
où on a multiplié l'égalité par e^x qui est strictement positif. Le polynôme $X^2 - 2yX - 1$ a pour discriminant $4y^2+4$, et a donc deux racines réelles données par
$$r_1 = y + \sqrt{y^2+1}, \qquad \text{et} \qquad r_2 = y - \sqrt{y^2+1}.$$
Comme $|y| < \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1}$, on a $r_2 < 0$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, on en déduit :
$$y \;=\; \operatorname{sh} x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x \;=\; y+\sqrt{y^2+1} \;\Leftrightarrow\; x \;=\; \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{argsh} x \;=\; \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.