DM 2

---

1 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

1. En développant le membre de gauche, montrer que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \;=\; 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2.$$

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \;\leqslant\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i^2 y_j^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_i x_j y_j + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_j^2 y_i^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),
\end{aligned}$$

car les indices des sommes sont muets. En regroupant les termes, on obtient bien l'égalité désirée.

2. D'après la question précédente, on a

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \geqslant 0$$

donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

On compose ensuit par la fonction racine carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et on obtient le résultat.

---

2 *Transformation d'Abel.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$, et on pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} a_i, \qquad \text{et, si } k < n, \qquad b_k = B_{k+1} - B_k.$$

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer a_k en fonction de A_k et A_{k-1}.
2. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k \;=\; A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

3. *Application.* Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k$.

1. Si $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$A_k = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i\right) + a_k = A_{k-1} + a_k, \quad \text{donc} \quad a_k = A_k - A_{k-1}.$$

2. On déduit de la question précédente que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} B_k$$

Or par changement d'indice $\ell = k-1$, on a $\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} B_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} A_\ell B_{\ell+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1}$, l'indice étant muet. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k B_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} &= \underbrace{a_0}_{=A_0} B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k B_k + A_n B_n - A_0 B_1 - \sum_{k=1}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + A_0 (B_0 - B_1) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}), \end{aligned}$$

ce qui conclut car pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $B_k - B_{k+1} = -b_k$.

3. Il suffit d'appliquer la formule précédente en posant $a_k = 2^k$ et $B_k = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi,

$$A_k = \sum_{k=0}^{n} 2^i = 2^{k+1} - 1, \quad \text{et} \quad b_k = 1.$$

Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k 2^k = n(2^{n+1} - 1) - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) &= n(2^{n+1} - 1) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= n(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) + n \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2. \end{aligned}$$