

Chapitre 32

Familles sommables

I Sommation de familles de $\overline{\mathbb{R}}_+$ **Définition - Somme d'une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$**

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On appelle somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \subset I, F \text{ fini} \right\}$$

Si $\sum_{i \in I} u_i \in \mathbb{R}_+$, on dit que la famille est *sommable*, et on note parfois $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Remarques.

- Si un des termes de la famille est infini, la somme de la famille est infinie.
- Si $J \subset I$, alors $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$.
- Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors la caractérisation du sup assure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $F \subset I$ telle que

$$\sum_{i \in F} u_i \geq \left(\sum_{i \in I} u_i \right) - \varepsilon.$$

Théorème - Lien avec les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$.

- ◊ Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,
- ◊ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = +\infty$. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.

- Si $\sum u_n$ converge, alors pour toute partie finie F de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n \in F} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Or si $F_N = \llbracket 0, N \rrbracket$, on a $\sum_{n \in F_N} u_n = \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, d'où l'égalité par caractérisation séquentielle du sup.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \geq \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où le résultat. $\square$

Remarque. On retiendra qu'on peut toujours écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque les réels u_n sont positifs, au sens des familles sommables.

Théorème - Sommation par paquets

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I , c'est-à-dire que $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$. Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

Démonstration. Admis. $\square$

Exemples.

- En regroupant par paquets les pairs et les impairs, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} u_n + \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} u_n$.
- On peut calculer la somme $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i+j}$ en regroupant par paquets tous les couples (i, j) ayant même somme $i + j$:

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i+j} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2, \\ i+j=k}} u_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k |\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j=k\}| = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1)u_k.$$

$$\text{car } \mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j=k\}.$$

Le théorème de Fubini énoncé ci-dessous concerne le cas où la famille est indexée par un produit. Il assure qu'on peut intervertir les sommes lors de sommations successives d'une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Théorème - Fubini, cas positif

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Démonstration. On remarque que $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} A_i$, où $A_i = \{(i,j), j \in J\}$, donc par sommation par paquets,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{(i,j) \in A_i} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}.$$

De même pour l'autre somme. □

Remarques.

- Si pour tout $(i,j) \in I \times J$, le réel $u_{i,j}$ s'écrit $u_{i,j} = a_i b_j$, alors le théorème de Fubini donne

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

- *Cas des sommes triangulaires.* Avec le même raisonnement, on obtient qu'on peut intervertir les sommes triangulaires de nombres réels positifs comme les sommes finies, par exemple :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i u_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j) \in I \times J, \\ j \leq i}} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} u_{i,j}.$$

Théorème - Sommation et opérations

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$.

- *Croissance* : si pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, alors $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.
- *Linéarité* : $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$.
- *Réindexation* : si φ est une bijection d'un ensemble J dans I , alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_{\varphi(j)}$.

Remarques.

- La croissance entraîne que si pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, et $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ l'est également.
- Le résultat sur la réindexation assure en particulier que, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors sa somme ne dépend pas de l'ordre des termes : on dit qu'elle est *commutativement convergente*.

II Familles sommables

1. Définition

Définition - Famille sommable – $\ell^1(I)$

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est *sommable* si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$. On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^I$.

Exemple. Si $\sum u_n$ est une série de nombres complexes, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Notation - Partie positive, partie négative

Si $x \in \mathbb{R}$, on note

$$x^+ = \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0)$$

On appelle x^+ la *partie positive* du réel x , et x^- sa *partie négative*.

Remarque. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^+, x^- \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs,

- ◇ $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, et $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$,
- ◇ $x = x^+ - x^-$, et $|x| = x^+ + x^-$.

Définition-théorème - Somme d'une famille sommable

- Si $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de $\mathbb{R}^I$, alors $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables. On définit alors la *somme de la famille* $(u_i)_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

- Si $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de $\mathbb{C}^I$, alors $(\Re u_i)_{i \in I}$ et $(\Im u_i)_{i \in I}$ sont sommables. On définit alors la *somme de la famille* $(u_i)_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \Re u_i + i \sum_{i \in I} \Im u_i.$$

Démonstration.

- Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, comme pour tout $i \in I$, $u_i^+ = |u_i| - u_i^- \leq |u_i|$, on déduit par comparaison que $(u_i^+)_{i \in I}$ est sommable. De même pour $(u_i^-)_{i \in I}$.
- Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, comme pour tout $i \in I$, $|\Re(u_i)| \leq |u_i|$, on en déduit par comparaison que $(\Re(u_i))_{i \in I}$ est sommable. De même pour $(\Im(u_i))_{i \in I}$. $\square$

Théorème - Approximation par une somme finie

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et $\varepsilon > 0$, alors il existe une partie $F \subset I$ finie telle que

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. On sait d'après le cas positif qu'il existe des parties finies F_1, F_2 de I telles que $\sum_{i \in F_1} u_i^+ \geq \sum_{i \in I} u_i^+ - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum_{i \in F_2} u_i^- \geq \sum_{i \in I} u_i^- - \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, en posant $F = F_1 \cup F_2$, F est une partie finie de I , et

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| = \left| \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in F} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- + \sum_{i \in F} u_i^- \right| \leq \left| \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in F} u_i^+ \right| + \left| \sum_{i \in I} u_i^- - \sum_{i \in F} u_i^- \right| \leq \varepsilon,$$

car $\square$

2. Propriétés de la somme d'une famille sommable

Théorème - Linéarité de la somme

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables, alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ l'est également, et

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$$

Ainsi, $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration. Si $F \subset I$ est fini, par inégalité triangulaire, $\sum_{i \in F} |\lambda u_i + \mu v_i| \leq |\lambda| \sum_{i \in F} |u_i| + |\mu| \sum_{i \in F} |v_i| \leq |\lambda| S_u + |\mu| S_v$, où $S_u = \sum_{i \in F} |u_i|$ et $S_v = \sum_{i \in F} |v_i|$. Ainsi,

$$\sup \left\{ \sum_{i \in F} |\lambda u_i + \mu v_i|, F \subset I, F \text{ fini} \right\} \leq |\lambda| S_u + |\mu| S_v,$$

d'où la sommabilité.

- Montrons l'additivité dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: pour tout $i \in I$, $u_i + v_i = (u_i + v_i)^+ - (u_i + v_i)^- = u_i^+ - u_i^- + v_i^+ - v_i^-$, ce qui entraîne que $(u_i + v_i)^+ + u_i^- + v_i^- = (u_i + v_i)^- + u_i^+ + v_i^+$. Par positivité des familles, on a

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i)^+ + \sum_{i \in I} u_i^- + \sum_{i \in I} v_i^- = \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^- + \sum_{i \in I} u_i^+ + \sum_{i \in I} v_i^+.$$

Par conséquent, $\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^+ - \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^- = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- + \sum_{i \in I} v_i^+ - \sum_{i \in I} v_i^- = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} (\Re(u_i) + \Re(v_i)) + i \sum_{i \in I} (\Im(u_i) + \Im(v_i))$, et le résultat se déduit du point précédent. $\square$

Théorème - Inégalité triangulaire

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de $\mathbb{K}$, alors $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$.

Démonstration. Soit F une partie finie de I . On a $\left| \sum_{i \in F} u_i \right| \leq \sum_{i \in F} |u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$ par inégalité triangulaire pour une somme finie, d'où le résultat par passage au sup. $\square$

Théorème - Sommation par paquets

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I , alors pour tout $k \in K$, la famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable, la famille $(\sum_{i \in I_k} u_i)_{k \in K}$ est sommable, et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

Démonstration. Pour tout $k \in K$, on a $\sum_{i \in I_k} |u_i| \leq \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$ donc $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable. Ensuite,

$$\sum_{k \in K} \left| \sum_{i \in I_k} u_i \right| \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |u_i| = \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty,$$

par sommation par paquets pour une famille à termes positifs, d'où la sommabilité de la dernière famille.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le théorème de sommation par paquets dans le cas positif appliqué aux familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ permet de conclure. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on applique le résultat précédent aux familles $(\Re u_i)_{i \in I}$ et $(\Im u_i)_{i \in I}$. $\square$

Comme dans le cas positif, le théorème de Fubini s'en déduit directement.

Théorème - Théorème de Fubini

Si $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est une famille sommable, alors $(\sum_{j \in J} u_{i,j})_{i \in I}$ et $(\sum_{i \in I} u_{i,j})_{j \in J}$ sont bien définies et sommables,

et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Remarque. On utilisera généralement le théorème en deux temps pour justifier une interversion de somme dans le cas d'une famille réelle ou complexe :

- on justifie la sommabilité, en ayant recours au cas positif du théorème de Fubini,
- on utilise le théorème de Fubini pour intervertir les sommes.

3. Produit de Cauchy

Nous nous intéressons ici à la manière de calculer un produit de sommes de familles sommables, essentiellement dans le cas $I = \mathbb{N}$ (c'est-à-dire dans le cas des séries). Signalons d'abord le résultat suivant, qui généralise une remarque faite ci-dessus dans le cas des familles de $\mathbb{R}_+$.

Théorème - Somme et produit

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont deux familles sommables, alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable, et

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Démonstration. Par le cas positif du théorème de Fubini, on a $\sum_{(i,j) \in I \times J} |a_i b_j| = \sum_{i \in I} |a_i| \sum_{j \in J} |b_j| < +\infty$, d'où la sommabilité. Le théorème de Fubini assure alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \left(\sum_{j \in J} b_j \right). \quad \square$$

Théorème - Produit de Cauchy

Soient $a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$. Alors $\sum c_n$ converge, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Démonstration. D'après l'hypothèse, les familles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables, et on a d'après le théorème précédent,

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

en regroupant par paquets les couples (i, j) ayant la même somme $i + j$: $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i + j = n\}$. $\square$

Exemples.

- Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $|x| < 1$, alors on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$: comme $\sum x^n$ converge absolument,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n x^i x^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{i=0}^n 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

- Si $x, y \in \mathbb{C}$, on sait que $\sum \frac{x^n}{n!}$ et $\sum \frac{y^n}{n!}$ convergent absolument, donc

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n.$$

Remarque. Ce dernier exemple permet de retrouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $e^x e^y = e^{x+y}$. En d'autres termes, $\exp$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.