

## Chapitre 31

## Fonctions de deux variables

Rappelons deux manières équivalentes de voir la dérivabilité d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en un point  $a$ , en vue de tenter de les généraliser au cas d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable en } a &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe et est finie} \\ &\Leftrightarrow f \text{ admet un DL d'ordre 1 en } a : f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \alpha(x-a) + o(x-a) \end{aligned}$$

Le premier point de vue est celui du nombre dérivé, le second celui de l'existence d'une approximation de la courbe de  $f$  au voisinage du point d'abscisse  $a$  par une fonction affine : sa tangente.

Nous allons voir que ces deux points de vue permettent chacun une généralisation au cas des fonctions de deux variables, mais les deux définitions obtenues ne sont plus équivalentes.

## I Un peu de topologie

1. Ouverts de  $\mathbb{R}^2$ 

Dans la suite,  $\|\cdot\|$  désigne la norme issue du produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition - Boule ouverte**

Soient  $u \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ . On appelle boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^2, \|u - v\| < r\}$$

On appelle par ailleurs boule fermée  $B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^2, \|u - v\| \leq r\}$ .

**Remarque.** Si  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors  $B(u, r)$  n'est autre que le disque de centre le point de coordonnées  $(x, y)$  et de rayon  $r$ .

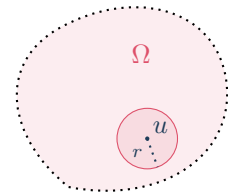
**Définition - Ouvert de  $\mathbb{R}^2$** 

On dit que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  si pour tout  $u \in \Omega$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(u, r) \subset \Omega$ .

On dit qu'une partie  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  est un fermé si son complémentaire est ouvert.

**Remarques.**

- Un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est donc une partie qui contient une boule ouverte centrée en chacun de ses points. Il n'est pas difficile de se persuader qu'un ouvert n'est autre qu'une union de boules ouvertes.
- Une boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert.

**Exemples.**

- $\mathbb{R}^2$  et  $\emptyset$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .
- L'ensemble  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$  est un ouvert : pour tout  $u = (x, y) \in \Omega$ , on a  $B(u, \frac{y}{2}) \subset \Omega$ .

## 2. Surface représentative

De la même manière qu'on représente une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par une courbe dans le plan, on a coutume de représenter une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par une surface dans l'espace. Son graphe est plus précisément donné par

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y)\}.$$

**Exemples.****Définition - Ligne de niveau**

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \lambda\}$  est la ligne de niveau de  $f$  associée à la valeur  $\lambda$ .

**Exemple.** Les courbes de niveau de la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  sont des cercles.

**Exercice 1.** Déterminer la forme des lignes de niveau de la fonction  $f : (x, y) \mapsto |x| + |y|$ .

**3. Continuité****Définition - Continuité d'une fonction à deux variables**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On dit qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $a \in \Omega$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que  $f$  est continue sur  $\Omega$  si  $f$  est continue en tout point de  $\Omega$ .

**Remarque.** On peut montrer que comme pour les fonctions d'une seule variable, l'ensemble des fonctions à deux variables sur un ouvert est stable :

- par combinaison linéaire,
- par produit,
- par quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

**Remarque.** Il découle de la définition que si  $f$  est continue en  $a \in \Omega$ , alors pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Omega$  vérifiant  $\|a_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on a  $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$ .

**Exemple.** La fonction

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue en  $(0, 0)$  : si on note  $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $f(a_n) = \frac{1}{2}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ .

**⚠** Il ne suffit pas que les fonctions partielles en un point  $(x_0, y_0)$ , données par  $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$  et  $f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$  soient continues respectivement en  $x_0$  et  $y_0$  pour avoir la continuité de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ .

*Exemple.* Si  $f$  est la fonction de l'exemple précédent, les fonctions partielles en  $(0, 0)$  sont nulles donc continues en 0, mais  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**II Dérivées partielles**

Dans la suite, on note  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**1. Définitions****Définition - Dérivée suivant un vecteur**

On dit que  $f$  est dérivable en  $a \in \Omega$  suivant le vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$ , si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe et est finie. Dans ce cas, on appelle cette limite *dérivée de  $f$  en  $a$  suivant le vecteur  $v$* , et on la note  $df(a)(v)$ . On dit aussi que  $df(a)(v)$  est une *dérivée directionnelle* de  $f$ .

**Exemple.** On considère la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ . On étudie la dérivabilité de  $f$  en un point  $a = (a_1, a_2)$  suivant le vecteur  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{(a_1 + tv_1)^2 - (a_2 + tv_2)^2 - (a_1^2 - a_2^2)}{t} = 2(a_1v_1 - a_2v_2) + t(v_1^2 - v_2^2).$$

Ainsi,  $f$  est dérivable en  $a$  suivant le vecteur  $u$ , et  $df(a)(v) = 2(a_1v_1 - a_2v_2)$ .

### Définition - Dérivées partielles

Soient  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . Si les réels  $df(a)(e_1)$  et  $df(a)(e_2)$  existent, on les appelle *dérivées partielles* de  $f$  en  $a$ , et on les note respectivement  $\partial_1 f(a)$  et  $\partial_2 f(a)$ , ou encore  $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ .

En d'autres termes, si les dérivées partielles de  $f$  existent,

$$\partial_1 f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad \text{et} \quad \partial_2 f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Si  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\Omega$ , les fonctions  $\partial_1 f$  et  $\partial_2$  ainsi définies sur  $\Omega$  sont appelées les dérivées partielles de  $f$ .

a. si les variables sont notées  $x$  et  $y$ .

**Remarque.** Calculer les dérivées partielles d'une fonction  $f$  en un point revient donc à "geler" une des deux variables, et dériver comme une fonction d'une variable par rapport à l'autre.

**Exemple.** On étudie l'existence de dérivée partielle en tout point de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Si  $a = (x, y) \neq (0, 0)$ , alors  $f$  a des dérivées partielles en  $a$ , données par  $\partial_1 f(a) = \frac{y(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}$ , et  $\partial_2 f(a) = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ .
- Si  $a = (0, 0)$  : on a

$$\forall t \neq 0, \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, \quad \text{donc} \quad \partial_1 f(0, 0) = 0.$$

De même,  $\partial_2 f(0, 0)$  existe et vaut 0. On a donc montré que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

**Remarque.** Comme nous l'avons vu plus haut, la fonction de l'exemple ci-dessus n'est pas continue en  $(0, 0)$ , ce qui montre qu'une fonction peut avoir des dérivées partielles en un point sans être continue en ce point. On peut même construire des fonctions possédant des dérivées suivant tout vecteur en un point, mais non continues en ce point.

### Définition - Gradient

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant des dérivées partielles en  $a \in \Omega$ . On appelle *gradient* de  $f$  en  $a$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  donné par

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a)).$$

**Exemple.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|^2$ . Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , donc le gradient existe en tout point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y).$$

**Remarque.** Toujours avec l'identification  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  à l'esprit, on note souvent  $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$ .

Les dérivées partielles étant des dérivées de fonctions d'une variable, il est clair que tous les théorèmes rencontrés dans ce cadre s'appliquent. On peut alors obtenir immédiatement le résultat suivant.

### Théorème - Dérivées partielles et opérations

Soient  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  admettent des dérivées partielles en  $a \in \Omega$ . Alors :

- ◇  $\lambda f + \mu g$  a des dérivées partielles en  $a$ , et  $\partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .
- ◇  $fg$  a des dérivées partielles en  $a$ , et  $\partial_i(fg)(a) = ((\partial_i f)g + f(\partial_i g))(a)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

◇ si  $g$  ne s'annule pas, alors  $\frac{f}{g}$  a des dérivées partielles en  $a$ , et  $\partial_i\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{(\partial_i f)g - f\partial_i g}{g^2}(a)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

## 2. Développement limité d'ordre 1

Intéressons-nous au deuxième point de vue :

### Définition - Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

On dit que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  si  $f$  admet des dérivées partielles sur  $\Omega$ , qui sont continues sur  $\Omega$ . On note  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

**Remarque.** Comme précédemment, on a stabilité de  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  par combinaisons linéaires, produit et quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

### Théorème - Développement limité d'ordre 1

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  et  $a \in \Omega$ , alors  $f$  possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de  $a$  :

$$f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|),$$

ce qui se réécrit  $f(u) \underset{\|u-a\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u \rangle + o(\|u-a\|)$ .

**Démonstration.** Admis. □

**Remarque.** On peut encore récrire le développement limité à l'ordre 1 au point  $a = (x_0, y_0)$  :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

où  $\alpha = \partial_1 f(x_0, y_0)$  et  $\beta = \partial_2 f(x_0, y_0)$ . On remarque que  $z = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$  est l'équation d'un plan affine, que nous appelons *plan tangent* à la surface représentative de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ .

### Définition - Plan tangent

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $a \in \Omega$ . On appelle plan tangent à la surface représentative de  $f$  au point  $a = (x_0, y_0)$  le plan d'équation

$$z = f(a) + \partial_1 f(a)(x - x_0) + \partial_2 f(a)(y - y_0).$$

### Théorème - Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées suivant un vecteur

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $a \in \Omega$ , alors  $f$  admet des dérivées suivant tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^2$ , et

$$df(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

**Démonstration.** Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . D'après le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en  $a$ , on a

$$f(a+tv) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(a) + t \langle \nabla f(a), v \rangle + o(t), \quad \text{donc} \quad \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \langle \nabla f(a), v \rangle + o(1).$$

Par passage à la limite lorsque  $t \rightarrow 0$ , on obtient l'existence de  $df(a)(v)$ , et  $df(a)(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle$ . □

**Remarque.** Plus généralement, si  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a \in \Omega$  : il existe  $b \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle b, h \rangle + o(\|h\|),$$

alors  $f$  a des dérivées suivant tout vecteurs  $v \in \mathbb{R}^2$ , et  $df(a)(v) = \langle b, v \rangle$ . En particulier,  $\nabla f(a) = b$ .

Ceci fournit un moyen de déterminer le gradient en déterminant un développement limité d'ordre 1 pour trouver le vecteur  $b$ , puis  $\nabla f(a)$ .

**Exercice 2.** Soient  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  tel que pour tous  $u, v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$ , et la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f : u \mapsto \langle \varphi(u), u \rangle.$$

Calculer  $\nabla f(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ .

**Direction de plus grande pente.** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , on peut chercher une direction  $v \in \mathbb{R}^2$  dans laquelle la dérivée directionnelle est la plus grande en  $a \in \Omega$  tel que  $\nabla f(a) \neq 0$ . En d'autres termes, on cherche la direction de plus grande pente en  $f$ . Pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\langle \nabla f(a), v \rangle \leq \|\nabla f(a)\| \|v\|,$$

par Cauchy-Schwarz, avec égalité si et seulement si les vecteurs  $\nabla f(a)$  et  $v$  sont positivement liés. Autrement dit, la direction de plus grande pente pour  $f$  en  $a$  est donnée par  $\nabla f(a)$ .

### 3. Règle de la chaîne

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $\gamma : I \rightarrow \Omega$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On peut donc introduire la fonction composée

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(\gamma(t)) \end{aligned}$$

qui est une fonction d'une variable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Nous allons nous intéresser à la dérivation de cette fonction dans le cas où  $\gamma$  est assez régulière. Pour tout  $t \in I$ , on écrit  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , ce qui définit des fonctions  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . On note alors

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

#### Théorème - Règle de la chaîne

Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Alors, la fonction  $g = f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et pour tout  $t \in I$ ,

$$g'(t) = x'(t) \partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_2 f(x(t), y(t))$$

ce qui se réécrit plus simplement :

$$g'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle.$$

**Exemple.** On considère  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , et on introduit la fonction  $g : t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ , alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$g'(t) = -\sin t \partial_1 f(\cos t, \sin t) + \cos t \partial_2 f(\cos t, \sin t).$$

**Remarque.** Pour mémorisation, la règle de la chaîne peut se récrire : pour tout  $t \in I$ ,

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

**Démonstration.** Si  $t \in I$ , le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 au voisinage de  $\varphi(t)$  donne

$$f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t)) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi(t+h) - \varphi(t) \rangle + o(\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|)$$

Or  $\frac{1}{h} \|\varphi(t+h) - \varphi(t)\| = \sqrt{\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ , donc

$$\frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \left\langle \nabla f(\varphi(t)), \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \right\rangle + o(1)$$

Donc  $\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \partial_1 f(\varphi(t)) \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + \partial_2 f(\varphi(t)) \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + o(1)$ , et

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_1 f(\varphi(t)) x'(t) + \partial_2 f(\varphi(t)) y'(t). \quad \square$$

**Théorème - Règle de la chaîne – 2**

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  et  $\varphi : U \rightarrow \Omega$ , on écrit pour tout  $(x, y) \in U$ ,

$$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

et on suppose les fonctions  $u$  et  $v$  ainsi définies sont de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $g = f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , et pour tout  $a \in U$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(a) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(a)) \frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(a)) \frac{\partial v}{\partial x}(a), \\ \frac{\partial g}{\partial y}(a) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(a)) \frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(a)) \frac{\partial v}{\partial y}(a),\end{aligned}$$

en notant  $\frac{\partial f}{\partial u}$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}$  les dérivées partielles de  $f$ .

**Démonstration.** Si  $a = (x_0, y_0)$ , on obtient le résultat par application de la règle de la chaîne du résultat précédent aux fonctions  $x \mapsto f(\varphi(x, y_0))$  et  $y \mapsto f(\varphi(x_0, y))$ , qui sont des fonctions à valeurs réelles.  $\square$

**III Extrema****Définition - Extremum global, extremum local**

Soient  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in A$ . On dit que :

- ◇  $f$  admet un minimum global sur  $A$  en  $a$  si :  $\forall u \in A, f(u) \geq f(a)$ .
- ◇  $f$  admet un minimum local sur  $A$  en  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que :  $\forall u \in A \cap B(a, r), f(u) \geq f(a)$ .

La définition est analogue pour le cas d'un maximum. On parle d'extremum lorsque  $f$  admet en  $a$  un minimum ou un maximum.

**Définition - Point critique**

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . On appelle point critique de  $f$  sur  $\Omega$  tout point  $a \in \Omega$  tel que  $\nabla f(a) = (0, 0)$ .

**Théorème - Condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1**

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \Omega$ , alors  $\nabla f(a) = (0, 0)$ . Autrement dit,  $a$  est un point critique de  $f$ .

**Démonstration.** On suppose par exemple que  $f$  admet un minimum global sur  $\Omega$  en  $a$ . Il existe donc  $r > 0$  tel que  $f$  ait un minimum global sur  $B(a, r)$  en  $a$  : comme  $\Omega$  est ouvert, on peut supposer que  $r$  est suffisamment petit pour avoir  $B(a, r) \subset \Omega$ .

Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Si  $|t| < \frac{\|v\|}{r}$ , alors  $\|(a + tv) - a\| = |t| \|v\| < r$ , donc  $a + tv \in B(a, r)$ . La fonction

$$g : t \mapsto f(a + tv)$$

est dérivable et minimale en 0 sur l'intervalle ouvert  $] -\frac{\|v\|}{r}, \frac{\|v\|}{r} [$ . Alors,  $g'(0) = 0$ , c'est-à-dire que  $\langle \nabla f(a), v \rangle = 0$ . Finalement,  $\nabla f(a) \in (\mathbb{R}^2)^\perp = \{0\}$ .  $\square$

**Remarque.** Le théorème ci-dessus garantit que, lorsqu'on cherche les extrema de  $f$  sur un ouvert, les extrema locaux sont à rechercher parmi les points critiques.

**⚠** Comme dans le cas d'une fonction d'une seule variable, la condition du théorème est nécessaire mais pas suffisante. À titre d'exemple, si  $f : (x, y) \mapsto x^3$ , alors  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ , mais pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f(\frac{1}{n}, 0) - f(0, 0) > 0$ , et  $f(-\frac{1}{n}, 0) - f(0, 0) < 0$ .