

# Probabilités sur un univers fini

Nous nous intéressons ici aux expériences dites *aléatoires*, c'est-à-dire aux expériences susceptibles d'aboutir à des résultats différents si on les répète. Ces expériences s'opposent aux expériences dites *déterministes*, qui aboutissent toujours au même résultat.

Pour décrire une expérience aléatoire, il s'agit donc de décrire :

- toutes les issues possibles (qui seront en nombre fini dans le cadre du programme de MPSI),
- une mesure de vraisemblance de chacune de ces issues.

L'étude de ces expériences nous amènera à considérer des groupes d'issues possibles (*événements*), et souvent des quantités numériques qui dépendent de l'issue de l'expérience (*variables aléatoires*).

## I Introduction aux probabilités

### 1. Univers, événements

Les expériences aléatoires étudiées ne sont pas mathématiques en elles-mêmes, nous choisissons pour chacune d'elles un modèle, c'est-à-dire un cadre mathématiques pour les représenter. Une fois ce cadre posé, *le problème devient mathématique*.

Pour ce faire, on commence par se donner l'ensemble des issues possibles, appelé *univers* associé à l'expérience, qu'on note généralement  $\Omega$ .

Voici quelques exemples d'expériences aléatoires et de l'univers qu'on peut choisir pour les décrire.

#### Exemples.

- Lancer d'une pièce de monnaie :  $\Omega = \{P, F\}$ .
- Lancer d'un dé équilibré à 6 faces :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Lancer de deux pièces successivement :  $\Omega = \{(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)\} = \{P, F\}^2$ .
- Lancer de deux dés successivement :  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ .
- Tirage d'une main de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes : si on note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des 52 cartes, on choisit  $\Omega = \{P \subset \mathcal{C}, \text{Card } P = 5\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des sous-parties de  $\mathcal{C}$  qui contiennent 5 éléments.
- Podium (3 meilleures performances) dans une course à  $n$  participants numérotés de 1 à  $n$  : on prend pour  $\Omega$  l'ensemble des triplets d'éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Remarque.** On notera la différence entre les cas où l'ordre a une importance, pour lesquels les issues sont des  $k$ -uplets et les cas où l'ordre ne compte pas, pour lesquels les issues sont des ensembles. Par exemple :

- cas de deux lancers successifs d'une pièce :  $(P, F)$  et  $(F, P)$  sont deux issues différentes.
- cas d'une main de 5 cartes : les issues  $\{8 \heartsuit, 9 \clubsuit, V \clubsuit, R \diamondsuit, R \heartsuit\}$  et  $\{8 \heartsuit, R \heartsuit, 9 \clubsuit, V \clubsuit, R \diamondsuit\}$  sont les mêmes.

Dans toute la suite,  $\Omega$  désigne l'univers associé à une expérience aléatoire, qui sera supposé fini.

#### Définition - Événement

On appelle événement de  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\Omega$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . L'ensemble des événements est donc  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Soit  $A$  est un événement de  $\Omega$ .

- Si  $A = \Omega$ , l'événement est dit certain,
- Si  $A = \emptyset$ , l'événement est dit impossible.
- Si  $A$  est un singleton, l'événement est dit élémentaire.

**Remarque.** Il arrive qu'un événement soit décrit par une proposition liée à l'expérience aléatoire elle-même. Dans ce cas, l'événement  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  associé n'est autre que l'ensemble des issues de  $\Omega$  qui rendent vraie la proposition.

*Exemple.* Dans le cas du lancer de dé,  $A$  : “Le résultat du dé est pair” désigne  $A = \{2, 4, 6\}$ .  
 Dans le cas de 2 lancers de dé, “on obtient au moins un Pile” désigne  $\{(P, F), (P, P), (F, P)\}$ .

Un événement étant un ensemble, toutes les opérations que nous connaissons sur les ensembles peuvent être appliquées ici. Il convient toutefois de connaître l’interprétation de ces opérations, et leur terminologie dans le cadre des probabilités, qui diffère dans certains cas.

**Ensembles**

◇ **Complémentaire**

$\bar{A} = \Omega \setminus A$  : complémentaire de  $A$ .

◇ **Inclusion**

$A \subset B$  :  $A$  est inclus dans  $B$ .

◇ **Union**

$A \cup B$  : union de  $A$  et  $B$ .

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n : \text{union des } A_i.$$

◇ **Intersection**

$A \cap B$  : intersection de  $A$  et  $B$ .

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n : \text{union des } A_i.$$

◇ **Ensembles disjoints**

Si  $A \cap B = \emptyset$  : ensembles disjoints

◇ **Partition**

$(A_1, \dots, A_n)$  partition de  $\Omega$  :  
 –  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$   
 –  $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$

**Événement en probabilités**

◇ **Contraire**

$\bar{A}$  événement contraire :

$\bar{A}$  est réalisé ssi  $A$  ne l’est pas.

*Exemple.*  $A$  : “le résultat est pair”,  
 $\bar{A}$  : “le résultat est impair”.

◇ **Inclusion d’événements**

L’événement  $A$  est inclus dans  $B$  :

Dès que  $A$  est réalisé,  $B$  est réalisé.

*Exemple.*  $A$  : “le résultat est 2”  
 $B$  : “le résultat est pair”, on a  $A \subset B$ .

◇ **Union d’événements**

$A \cup B$  : “ $A$  ou  $B$ ”.

$A \cup B$  est réalisé ssi  $A$  est réalisé ou  $B$  est réalisé.

*Exemple.*  $A$  : “le résultat est pair”,  $B$  : “le résultat est 1”,  
 alors  $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$ .

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \text{ est réalisé ssi au moins l'un des } A_i \text{ est réalisé.}$$

◇ **Intersection d’événements**

$A \cap B$  : “ $A$  et  $B$ ”.

$A \cap B$  est réalisé ssi  $A$  est réalisé et  $B$  est réalisé.

*Exemple.*  $A$  : “le résultat est pair”,  $B$  : “le résultat est  $\leq 3$ ”,  
 alors  $A \cap B = \{2\}$ .

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ est réalisé ssi tous les } A_i \text{ sont réalisés.}$$

◇ **Événements incompatibles**

$A \cap B = \emptyset$  : événements incompatibles.

*Exemple.*  $A$  : “le résultat est 2”,  $B$  : “le résultat est impair”,  
 $A$  et  $B$  sont incompatibles.

◇ **Système complet d’événements**

$(A_1, \dots, A_n)$  système complet d’événements :

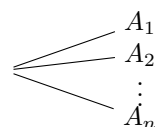
- les  $A_i$  dont deux à deux incompatibles,
- l’un des  $A_i$  est réalisé.

Finalement : exactement un des  $A_i$  est réalisé.

**Exemple.** On lance  $n$  fois une pièce de monnaie, et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère l’événement  $A_i$  : “on obtient Pile au  $i$ -ème lancer”. Alors

- l’événement “on obtient Pile aux deux premiers lancers” est représenté par  $A_1 \cap A_2$ ,
- l’événement “on obtient Pile au moins une fois au cours des  $n$  lancers” est représenté par  $A_1 \cup \dots \cup A_n$ .

Comme on l’a vu ci-dessus, un système complet d’événements  $(A_1, \dots, A_n)$  est une partition de  $\Omega$ . En termes probabilistes, ceci signifie qu’exactly un des événements  $A_i$  est réalisé. Il arrive qu’on représente des situations comme celle-ci par un arbre.



- Si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événement, alors pour tout événement  $B$ , on a

$$B = (B \cap A_1) \sqcup (B \cap A_2) \sqcup \dots \sqcup (B \cap A_n).$$

- Si  $A$  est un événement, alors  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements.
- Pour tout univers  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ,  $(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\})$  est un système complet d'événements. Il s'agit de la partition de  $\Omega$  en événements élémentaires.

## 2. Probabilité

Une fois décrit l'univers, nous ne disposons pas de toutes les informations pour modéliser une expérience aléatoire : il reste à donner une mesure de "vraisemblance" à chaque issue, qui ne surviennent pas nécessairement toutes aussi fréquemment. Plus généralement, on souhaite donner une mesure de "vraisemblance" à tout événement.

### Définition - Probabilité

Une mesure de probabilité, ou simplement probabilité, sur un univers fini  $\Omega$  est une application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , et  $\mathbb{P}$  est *additive* : pour tous  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

On dit alors que  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un *espace probabilisé fini*.

Nous donnons ci-dessous un premier exemple de probabilité, qui représente le cas où les issues de l'univers sont toutes aussi probables. On parle d'équiprobabilité.

### Définition-théorème - Probabilité uniforme

Si  $\Omega$  est un ensemble fini non vide, l'application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

définit une probabilité sur  $\Omega$ , appelée probabilité *uniforme*.

**Démonstration.** Tout d'abord, on a vu que pour tout ensemble  $A \subset \Omega$ , on a  $|A| \leq |\Omega|$ , donc  $\mathbb{P}$  est bien définie sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ . Par ailleurs,

- on a  $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$ ,
- si  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  sont disjoints, on a vu que  $|A \sqcup B| = |A| + |B|$ , donc  $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $\mathbb{P}$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  et  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , alors  $|A|$  est le nombre d'issues de  $\Omega$  réalisant l'événement  $A$ , on peut donc écrire :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

### Définition - Distribution de probabilité

On appelle *distribution de probabilité* sur l'univers  $\Omega$  la donnée d'une famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de réels de  $[0, 1]$  tels que  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ .

**Remarque.** Se donner une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  revient à se donner une distribution de probabilité  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ . En effet,

- il est clair que si  $\mathbb{P}$  est une probabilité, alors  $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$  est une distribution de probabilité.
- Réciproquement, si  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une distribution de probabilité, alors

$$A \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

est une probabilité sur  $\Omega$ .

### 3. Propriétés

#### Théorème - Propriétés d'une probabilité

Soient  $\mathbb{P}$  une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  et  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  deux événements.

- i.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- ii.  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- iii.  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ . Si de plus  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ .
- iv. *Croissance* : Si  $A \subset B$  alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
- v. Soient  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ .
  - *Additivité* : si  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux incompatibles alors  $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ .
  - *Sous-additivité* : on a toujours  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ .

#### Démonstration.

- Montrons i. et ii.. On a  $A \sqcup \bar{A} = \Omega$ , donc  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ . On en déduit donc que  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .  
En appliquant ceci à l'événement  $\Omega$ , on obtient  $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$ , ce qui donne ii..
- Montrons iii. et iv.. On sait que  $B = (B \cap \bar{A}) \sqcup (B \cap A) = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$ , donc  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$ , ce qui donne bien  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .  
Dans le cas où  $A \subset B$ , on a  $A \cap B = A$ , et on a bien  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ . En particulier, on a donc  $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$ , ce qui entraîne que  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
- La propriété d'additivité se démontre par récurrence à partir de la propriété d'additivité de  $\mathbb{P}$ .  
Comme  $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ , on a  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ . La propriété de sous-additivité s'en déduit par récurrence également. □

#### Théorème - Formule des probabilités totales (première version)

Soient  $\mathbb{P}$  une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  et  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements de  $\Omega$ . Pour tout événement  $B$ , on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

**Démonstration.** Ceci découle directement de l'égalité  $B = (B \cap A_1) \sqcup (B \cap A_2) \sqcup \dots \sqcup (B \cap A_n)$  vue plus haut. □

**Remarque.** En particulier, si  $A$  et  $B$  sont des événements,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}).$$

Les formules ci-dessous permettent de calculer la probabilité d'une union de 2 ou 3 événements, qui ne sont pas nécessairement incompatibles deux à deux. Une version plus générale existe pour une union finie quelconque d'événements, mais elle n'est pas au programme.

#### Théorème - Formule du crible pour 2 ou 3 événements

Soient  $\mathbb{P}$  une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  et  $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$  trois événements.

- i.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
- ii.  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ .

#### Démonstration.

- i. Comme on l'a vu ci-dessus,  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
- ii. On a  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$  or  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$   
 $= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C)))$   
 $= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ . □

## II Probabilités conditionnelles

Lorsqu'on sait qu'un événement  $B$  est réalisé, il est naturel que la probabilité des autres événements s'en trouvent possiblement changée. on parle de probabilité conditionnelle, *sachant* qu'un événement  $B$  est réalisé.

**Exemple.** On s'intéresse à deux lancers de pièces consécutifs, et on note les résultats obtenus. L'univers associé est alors  $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ , et la probabilité associée est la probabilité uniforme. Si on appelle  $B$  l'événement  $\{(P, P)\}$ , alors on a  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ .

Si on ajoute maintenant l'information : l'événement  $B$  : "on obtient au moins une fois pile" est réalisé, alors l'univers doit n'est plus le même :  $\Omega' = \{(P, P), (P, F), (F, P)\}$ . La probabilité associée, qu'on notera parfois  $\mathbb{P}_B$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega'$ . Cette fois, on a donc  $\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{3}$ .

### 1. Définition

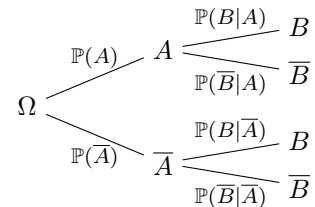
#### Définition - Probabilité conditionnelle

Si  $B \in \mathcal{S}(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ , on appelle probabilité de  $A$  sachant  $B$  le réel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \text{ parfois aussi noté } \mathbb{P}_B(A).$$

#### Remarque.

- On a donc  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B)$ , ce que l'on écrit encore sans ambiguïté lorsque  $\mathbb{P}(B) = 0$ .
- On retiendra que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)$  et  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B)$ . Selon les informations dont on dispose, on pourra choisir l'une ou l'autre.



**Exercice 1.** On extrait deux boules au hasard, successivement et sans remise, d'une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

#### Théorème - $\mathbb{P}_B$ est une probabilité

Soit  $B \in \mathcal{S}(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ , l'application  $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$  définit une probabilité. En particulier,

- i.  $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1, \mathbb{P}_B(\emptyset) = 0$ .
- ii.  $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$  pour tout événement  $B$ .
- iii.  $\mathbb{P}_B(A \sqcup A') = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A') - \mathbb{P}_B(A \cap A')$  pour tous  $A, A' \in \mathcal{S}(\Omega)$ .

**Démonstration.** On a tout d'abord  $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ . Puis, si  $A, A' \in \mathcal{S}(\Omega)$  sont tels que  $A \cap A' = \emptyset$ , alors par additivité,

$$\mathbb{P}_B(A \sqcup A') = \frac{\mathbb{P}((A \sqcup A') \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A'). \quad \square$$

### 2. Formule des probabilités composées

La formule de la proposition ci-dessous, dites des probabilités composées, est une généralisation aux cas de plus de événements de l'égalité  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B)$ .

#### Théorème - Formule des probabilités composées

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements. On suppose que  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ . Alors

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^n A_k \right) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2|A_1) \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2|A_1) \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\ &= \mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)} = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n), \end{aligned}$$

car le produit ci-dessus est télescopique. □

**Exemple.** Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires. L'expérience consiste à tirer au hasard, successivement et sans remise,  $n$  boules dans l'urne. Si on note  $B_i$  l'événement "la  $i$ ème boule tirée est blanche" pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la probabilité que les  $n$  boules tirées soient blanches peut s'écrire <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}(B_2|B_1) \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) \dots \mathbb{P}(B_n|B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}) \\ &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{n+1} = \frac{n!}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

### 3. Formule des probabilités totales

**Théorème - Formule des probabilités totales (seconde version)**

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle, alors pour tout événement  $B$ ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) P(A_i).$$

**Démonstration.** Comme  $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la première version  $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$  donne directement le résultat. □

**Remarque.** Dans le cas particulier du système complet  $(A, \bar{A})$ , on obtient  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A})$ .

**Exemple.** On considère de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . Dans l'urne numéro  $k$  se trouvent  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules rouges. On choisit une urne avec probabilité uniforme, puis on tire une boule dans cette urne. On cherche la probabilité de l'événement  $B$  : "la boule obtenue est blanche".

En notant  $U_k$  l'événement "on choisit l'urne numéro  $k$ " pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on s'aperçoit que  $U_1, \dots, U_n$  forment un système complet d'événements. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|U_k) \mathbb{P}(U_k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

### 4. Formule de Bayes

La formule de Bayes est une simple conséquence de la formule  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B)$  dans le cas où les événements sont de probabilité non nulle.

**Théorème - Formule de Bayes**

Soient  $A, B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  et  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Démonstration.** On a  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ . □

1. On remarque qu'on peut aussi calculer cette probabilité en remarquant qu'elle s'écrit  $\frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ , car l'expérience équivaut à tirer simultanément  $n$  boules dans l'urne.

**Remarque.** Si on combine ce résultat avec la formule des probabilités totales pour le calcul de  $\mathbb{P}(B)$ , on obtient

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})},$$

qui est une forme fréquemment utilisée de la formule de Bayes.

Plus généralement, si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle, et  $B$  est de probabilité non nulle, alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}.$$