

Dénombrement

I Cardinal

1. Définition

Définition - Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble non vide. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors on dit que E est fini, de cardinal n , et on note $|E| = n$ ou $\text{Card } E = n$.

Par ailleurs, l'ensemble \emptyset est également dit fini, et on convient que $|\emptyset| = 0$.

Remarques.

- Si $|E| = n$, alors n désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini E : une bijection de E sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ associe à chaque élément de E un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui lui est propre. On a alors "compté" les éléments de E . Cette bijection justifie qu'on peut écrire E sous la forme $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, où x_1, \dots, x_n sont les éléments (distincts) de E .
- On rappelle que deux ensembles E et F sont dits équipotents s'il existe une bijection entre E et F , ce qu'on note $E \cong F$. Par conséquent, dire que E est de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ revient à dire $E \cong \llbracket 1, n \rrbracket$.

Rappelons également que \cong vérifie les propriétés d'une relation d'équivalence : si E, F, G sont des ensembles,

- ◊ *réflexivité* : $E \cong E$,
- ◊ *symétrie* : si $E \cong F$, alors $F \cong E$,
- ◊ *transitivité* : si $E \cong F$ et $F \cong G$, alors $E \cong G$.

Lemme

Si E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in E$, alors $|E \setminus \{x_0\}| = n - 1$.

Démonstration. Soit φ une bijection de E vers $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, la fonction

$$\begin{aligned} \psi : E \setminus \{x_0\} &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\varphi(x_0)\} \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

est clairement bijective. Or $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\varphi(x_0)\}$ est en bijection avec $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$: la fonction $f : \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\varphi(x_0)\} \rightarrow \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ vérifiant $f(i) = i$ pour $i < \varphi(x_0)$ et $f(i) = i - 1$ pour $i > \varphi(x_0)$ est une bijection.

Ainsi, on a $E \setminus \{x_0\} \cong \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\varphi(x_0)\} \cong \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, donc $|E \setminus \{x_0\}| = n - 1$. □

Remarque. Une conséquence du lemme ci-dessus est que si $\llbracket 1, m \rrbracket$ et $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont en bijection, alors $m = n$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si $\llbracket 1, m \rrbracket$ et $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont en bijection, alors $m = n$.

- le cas $n = 1$ est clair,
- si le résultat est vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\llbracket 1, m \rrbracket \cong \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, alors $\llbracket 1, m - 1 \rrbracket \cong \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\varphi(m)\}$. Par le lemme, on a alors $\llbracket 1, m - 1 \rrbracket \cong \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $m - 1 = n$ par hypothèse de récurrence. On a donc bien $m = n + 1$.

Ceci donne l'unicité du cardinal d'un ensemble fini, la notation $|E| = n$ n'est donc pas ambiguë.

Théorème - Cardinal d'un sous-ensemble

Soit E un ensemble fini. Si $A \subset E$, alors A est un ensemble fini et $|A| \leq |E|$. Par ailleurs, $|A| = |E|$ si et seulement si $A = E$.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur le cardinal de E .

- Si $|E| = 0$, alors le résultat est clair : si $A \subset E$, alors $A = E = \emptyset$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose le résultat vrai pour les ensembles de cardinal n , et on considère un ensemble E de cardinal $n + 1$ et $A \subset E$.

- ◊ Si $A = E$, alors on a bien sûr $|A| = |E|$.
- ◊ Si $A \neq E$, alors il existe $x_0 \in E \setminus A$. D'après le lemme ci-dessus, on a $|E \setminus \{x_0\}| = n$. Comme $A \subset E \setminus \{x_0\}$, l'hypothèse de récurrence assure que $|A| \leq |E \setminus \{x_0\}| = n$, donc $|A| \leq |E|$.

Ceci montre bien que $|A| \leq |E|$, et qu'on a $|A| = |E|$ dans le seul cas où $|A| = |E|$, ce qui clôt la récurrence. \square

2. Principe additif, principe multiplicatif

Théorème - Principe additif

Si E_1, E_2 sont deux ensembles finis disjoints, alors $E_1 \sqcup E_2$ est fini et

$$|E_1 \sqcup E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

Plus généralement, si E_1, \dots, E_n sont finis deux à deux disjoints, alors $|E_1 \sqcup \dots \sqcup E_n| = |E_1| + \dots + |E_n|$.

Démonstration. On note $n_1 = |E_1|$ et $n_2 = |E_2|$. Si $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$, alors d'un des ensembles E_1, E_2 est vide donc le résultat est clair. Sinon, soient des bijections $\varphi_1 : E_1 \rightarrow \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $\varphi_2 : E_2 \rightarrow \llbracket 1, n_2 \rrbracket$. L'application $\varphi : E_1 \sqcup E_2 \rightarrow \llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ définie par

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \in E_1, \\ n_1 + \varphi_2(x) & \text{si } x \in E_2 \end{cases}$$

est bijective, donc $|E_1 \sqcup E_2| = n_1 + n_2 = |E_1| + |E_2|$. La généralisation se montre par une récurrence directe. \square

Théorème - Cardinal du complémentaire

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$, alors $|E \setminus A| = |E| - |A|$.

Démonstration. On a $E = (E \setminus A) \sqcup A$, donc $|E| = |E \setminus A| + |A|$ par le principe additif, ce qui conclut. \square

Théorème - Formule du crible pour deux ensembles

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont finis, et

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|.$$

Démonstration. On a $E \cup F = (E \setminus F) \sqcup F = (E \setminus (E \cap F)) \sqcup F$, donc $E \cup F$ est fini comme union d'ensembles finis, et $E \cap F$ est fini comme sous-ensemble de $E \cap F$. Par ailleurs, $|E \cup F| = |E \setminus (E \cap F)| + |F| = |E| - |E \cap F| + |F|$ d'après le théorème précédent, car $E \cap F \subset E$. \square

Théorème - Principe multiplicatif

Si E_1, E_2 sont deux ensembles finis, alors $E_1 \times E_2$ est fini et

$$|E_1 \times E_2| = |E_1| \times |E_2|.$$

Plus généralement, si E_1, \dots, E_n sont finis, alors $|E_1 \times \dots \times E_n| = |E_1| \times \dots \times |E_n|$.

Démonstration. Montrons le résultat pour deux ensembles. On remarque que $E_1 \times E_2 = \bigsqcup_{x \in E_1} \{x\} \times E_2$, donc par le principe additif,

$$|E_1 \times E_2| = \sum_{x \in E_1} |\{x\} \times E_2|.$$

Or pour tout $x \in E_1$, on a $\{x\} \times E_2 \cong E_2$: il suffit de considérer l'application $\varphi : \{x\} \times E_2 \rightarrow E_2$ définie par $\varphi(x, y) = y$ pour tout $y \in E_2$, qui est clairement bijective. Ainsi, $|E_1 \times E_2| = \sum_{x \in E_1} |E_2| = |E_1| \times |E_2|$. \square

Remarque. En particulier, si E est un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E^k des k -uplets d'éléments de E est finie, et $|E^k| = |E|^k$.

3. Applications et cardinal

Théorème - Nombre d'applications entre ensembles finis

Soient E, F deux ensembles finis. L'ensemble $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F est fini, et

$$|F^E| = |F|^{|E|}.$$

Démonstration. On note $k = |E|$. On peut donc noter x_1, \dots, x_k les k éléments de E . On considère l'application Φ : définie par :

$$\Phi : f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_k)).$$

Il est clair que pour tout $(y_1, \dots, y_k) \in F^k$, il existe une unique $f \in F^E$ telle que $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_k) = y_k$. En d'autres termes, Φ est bijective, ce qui entraîne que F^E est fini et $|F^E| = |F^k| = |F|^k = |F|^{|E|}$. \square

Théorème - Bijection entre deux ensembles de même cardinal

Soient E, F deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et une application $f : E \rightarrow F$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Démonstration. Supposons f injective, alors $|f(E)| = |E|$, donc $|f(E)| = |F|$. Comme $f(E) \subset F$, on obtient que $f(E) = F$, c'est-à-dire que f est surjective.

Supposons que f est surjective, on peut alors introduire une application $g : F \rightarrow E$ telle que pour tout $y \in F$, $g(y)$ est un antécédent de y par f . L'application g est injective : si $y, y' \in F$ sont tels que $g(y) = g(y')$, alors en notant $x = g(y)$, on a $f(x) = y$ et $f(x) = y'$, ce qui donne $y = y'$. Le point précédent assure alors que g est aussi surjective. Finalement, g est bijective, donc f l'est également comme réciproque de g . \square

II Arrangements et combinaisons

On s'intéresse ici, pour un ensemble E fini donné, au nombre de k -uplets d'éléments distincts de E , ainsi qu'au nombre de sous-ensembles de cardinal fixé de E .

1. Arrangements

Définition - Arrangements

Si E est un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle k -arrangement de E tout k -uplet d'éléments distincts de E .

Remarque. Par exemple, on pensera à un k -arrangement pour représenter le résultat de k tirages successifs (l'ordre compte) d'éléments de E sans remise (on ne peut tirer deux fois le même élément de E).

Théorème - Nombre d'arrangements

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k > n$, il n'existe pas de k -arrangement de E , et si $k \leq n$,

$$\text{il existe exactement } \frac{n!}{(n-k)!} \text{ } k\text{-arrangements de } E.$$

Démonstration. Il est clair que le nombre de k -arrangements dans un ensemble E à n éléments ne dépend pas de l'ensemble E . On note $\mathcal{A}_k(E)$ l'ensemble des k -uplets d'éléments distincts de E , pour tout entier k .

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout ensemble E de cardinal n , $|\mathcal{A}_k(E)| = \frac{n!}{(n-k)!}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si $n = 1$, il est clair que $|\mathcal{A}_1(E)| = 1$, donc le résultat est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n , et considérons un ensemble E de cardinal $n + 1$. On a

$$\mathcal{A}_k(E) = \bigsqcup_{x \in E} \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{A}_k(E), x_1 = x\}.$$

Or clairement pour tout $x \in E$, $|\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{A}_k(E), x_1 = x\}| = |\mathcal{A}_{k-1}(E \setminus \{x\})| = \frac{n!}{(n-(k-1))!} = \frac{n!}{(n+1-k)!}$ par hypothèse de récurrence, car $|E \setminus \{x\}| = n$.

Le principe additif donne alors :

$$|\mathcal{A}_k(E)| = \sum_{x \in E} |\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{A}_k(E), x_1 = x\}| = \sum_{x \in E} \frac{n!}{(n+1-k)!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!},$$

ce qui conclut. □

Remarque. Ce raisonnement par récurrence peut être synthétisé de la manière suivante : si $k \leq n$, pour choisir un k -uplet d'éléments distincts de E ,

- il y a n choix possibles pour le 1er élément du k -uplet,
- puis il y a $n - 1$ choix possibles pour le 2ème élément du k -uplet,
- ...
- puis il y a $n - k + 1$ choix possibles pour le k -ème élément du k -uplet.

On dénombre donc au total $n(n - 1) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ choix possibles.

Ce type de raisonnement doit être vu comme un condensé d'une preuve rigoureuse basée sur les principes additifs et multiplicatifs. On se contentera souvent de ce type de preuve pour éviter que les dénombrements soient exagérément techniques.

On retiendra :

- “on choisit ... , puis ... ” \rightarrow principe multiplicatif,
- “on choisit soit ... , soit ... ” \rightarrow principe additif.

Nombre de permutations. Si $|E| = n$, un n -arrangement représente une permutation de l'ensemble E . Par le théorème ci-dessus, il y a exactement $n!$ permutations de E si $|E| = n$.

Remarque. On retrouve donc que $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Exemple. Nombre d'injections. Soient E, F deux ensembles finis, on note $k = |E|$ et $n = |F|$. Si $k \leq n$, l'ensemble des applications injectives de E dans F est de cardinal $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Démonstration. On note x_1, \dots, x_k les k éléments de E , et $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des applications injectives de E dans F . On note que

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{I}(E, F) &\rightarrow F^k \\ f &\mapsto (f(x_1), \dots, f(x_k)) \end{aligned}$$

est clairement injective, donc définit une bijection de $\mathcal{I}(E, F)$ sur son ensemble image, qui n'est autre que l'ensemble des k -uplets d'éléments distincts de F . On a donc $|\mathcal{I}(E, F)| = |\mathcal{A}_k(E)| = \frac{n!}{(n-k)!}$. □

2. Combinaisons, coefficients binomiaux

Définition-théorème - Combinaisons, coefficients binomiaux

Soient E est un ensemble fini de cardinal n , et k un entier.

- on appelle k -combinaison de E une partie de E à k éléments,
- on note $\binom{n}{k}$ le nombre de k -combinaisons de E , ce nombre ne dépend pas du choix de E .

Remarque. Par exemple, on pensera à une k -combinaison pour représenter le résultat de k tirages simultanés (l'ordre ne compte pas) d'éléments de E . On ne peut bien sûr pas tirer deux fois le même élément de E dans ce cadre.

Notation. Comme dans le chapitre SOMMES ET PRODUITS, on convient de noter $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E à k éléments.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si E et F sont deux ensembles de cardinal n , alors $|\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k(F)|$.

Comme E et F sont de même cardinal, il existe une bijection φ de E dans F . Il suffit alors de remarquer que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}_k(E) &\rightarrow \mathcal{P}_k(F) \\ A &\mapsto \{\varphi(x), x \in A\} \end{aligned}$$

est bijective : elle est clairement bien définie car φ est bijective, et a pour réciproque l'application $B \mapsto \{\varphi^{-1}(y), y \in B\}$. On a donc bien $|\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k(F)|$. □

Théorème - Nombres de parties d'un ensemble fini

Si E est un ensemble fini, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Démonstration. Si on note $n = |E|$, on peut clairement écrire que $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E)$, ce qui entraîne par la formule du binôme de Newton que

$$|\mathcal{P}(E)| = \sum_{k=0}^n |\mathcal{P}_k(E)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad \square$$