Chapitre 26

Groupe symétrique – Déterminants

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n désigne un entier non nul.

I Groupe symétrique

On rappelle que si E est un ensemble, on note $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ le groupe formé par les bijections de E dans E, qu'on appelle aussi des *permutations*. Nous nous intéressons ici au groupe symétrique $\mathfrak{S}([\![1,n]\!])$, où $n \in \mathbb{N}^\star$, qu'on note $\mathfrak{S}_n$.

On remarque que si E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$, alors E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. Par conséquent, à cette bijection près, les résultats de ce chapitre concernant $\mathfrak{S}_n$ s'appliquent aussi aux permutations de E.

1. Généralités

Notation. On note parfois une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sous la forme d'un tableau :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On a par ailleurs généralement recours à la notation "produit" des groupes : on notera $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$, et on parlera du "produit" des permutations σ et τ.

Exemples. $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ (souvent notée simplement Id), $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$.

Définition - Support d'une permutation

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *support* de σ l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{i \in [\![1,n]\!],\ \sigma(i) \neq i\}$$

des éléments de $[\![1,n]\!]$ qui ne sont pas laissés fixes par σ.

Exemples. $\mathrm{Supp}(\mathrm{Id}) = \varnothing$, et $\mathrm{Supp}(\sigma) = [\![1,5]\!]$ dans l'exemple ci-dessus.

Remarque. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, alors $\sigma(i) \in \mathrm{Supp}(\sigma)$.

Démonstration. Si $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ et $j = \sigma(i)$, alors $j \neq i$. Ainsi, on a $\sigma(j) \neq j$ par injectivité de f. □

Théorème - Permutations à supports disjoints

Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ dont les supports sont disjoints commutent.

Démonstration. Soient des permutations $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\tau) = \varnothing$. Montrons que $\sigma\tau = \tau\sigma$.

- Si $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, alors on a vu que $\sigma(i) \in \mathrm{Supp}(\sigma)$. On en déduit que $i \notin \mathrm{Supp}(\tau)$ et $\sigma(i) \notin \mathrm{Supp}(\tau)$. Ceci entraîne que $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i)$, et $\tau(\sigma(i)) = \sigma(i)$, donc $\sigma\tau(i) = \tau\sigma(i)$. Le cas $i \in \mathrm{Supp}(\tau)$ est identique.
- Si $i \notin \mathrm{Supp}(\sigma)$ et $i \notin \mathrm{Supp}(\tau)$, alors $\sigma(i) = i$ et $\tau(i) = i$, donc $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i = \tau(i) = \tau(\sigma(i))$.

Finalement, $\sigma\tau(i) = \tau\sigma(i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc $\sigma\tau = \tau\sigma$. □

Définition - Cycles, transpositions

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- On dit que σ est un *cycle* s'il existe $i_1, \dots, i_k \in [\![1,n]\!]$ deux à deux distincts tels que $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{i_1, \dots, i_k\}$ et

$$\sigma(i_1) = i_2, \quad \sigma(i_2) = i_3, \quad \dots, \quad \sigma(i_{k-1}) = i_k, \quad \sigma(i_k) = i_1.$$

On note alors $\sigma = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$. On appelle k-cycle de $\mathfrak{S}_n$ un cycle dont le support est de cardinal k.
- On appelle *transposition* un 2-cycle de $\mathfrak{S}_n$.

Remarque. Un cycle $\sigma = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ de $\mathfrak{S}_n$ laisse fixe tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ autres que $i_1,\dots,i_k$. Ainsi, σ peut être vu comme une permutation de $E = \{i_1,\dots,i_k\}$, mais aussi plus généralement de tout ensemble contenant E.

Exemple. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est un 4-cycle qui s'écrit $\sigma = (1\ 3\ 4\ 7)$.

Remarques.

- L'écriture d'un k-cycle comme ci-dessus n'est pas unique : dans l'exemple qui précède, on peut aussi écrire $\sigma = (3\ 4\ 7\ 1)$.
- La bijection réciproque du k-cycle $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ est donnée par $(i_k\ i_{k-1}\ \dots\ i_1)$.
- Un k-cycle $\gamma = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ s'écrit comme le produit de $k-1$ transpositions :

$$\sigma = (i_1\ i_2)\,(i_2\ i_3)\,\dots\,(i_{k-1}\ i_k).$$

Théorème - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire de manière unique, à ordre des facteurs près, comme produit de cycles à supports disjoints.

Démonstration. (*Non exigible*). On se contente de donner l'idée de la preuve de l'existence : on fixe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et on note $E = [\![1,n]\!]$. Le résultat est clair pour $\sigma = \mathrm{Id}$, donc on peut supposer que $\mathrm{Supp}(\sigma) \neq \varnothing$.

- On fixe $a \in \mathrm{Supp}(\sigma)$. Comme E est fini, on sait qu'il existe un entier m tel que $\sigma^m(a) \in \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{m-1}(a)\}$, et on suppose que m est le plus petit tel entier. Alors, $\sigma^m(a) = a$: si $\sigma^m(a) = \sigma^k(a)$ avec $k \neq 0$, alors $\sigma^{m-k}(a) = a$, ce qui n'est pas possible car $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{m-1}(a)$ sont distincts. En notant $\mathscr{O} = \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{m-1}(a)\}$, on note que la restriction de σ à $\mathscr{O}$ est alors le cycle $\gamma = (a\ \sigma(a)\ \dots\ \sigma^{m-1}(a))$.
- On remarque que $E \backslash \mathscr{O}$ est alors stable par σ car les éléments de $\mathscr{O}$ ont tous leur antécédent dans $\mathscr{O}$. Ainsi, la restriction de σ à $E\backslash\mathscr{O}$, qu'on note σ', est une permutation de $E\backslash\mathscr{O}$, dont le support est disjoint de celui de γ. On a par ailleurs $\sigma = \gamma\sigma'$:
  - ◇ si $x \in \mathscr{O}$, alors $(\gamma\sigma')(x) = \gamma(x) = \sigma(x)$
  - ◇ si $x \in E\backslash\mathscr{O}$, alors $(\gamma\sigma')(x) = \sigma'(\gamma(x)) = \sigma'(x) = \sigma(x)$.

  On applique alors le même procédé que ci-dessus à la permutation σ', dont le support est strictement plus petit, et ainsi de suite.

Comme l'ensemble E est fini, le procédé décrit ci-dessus s'arrête naturellement, et on a bien écrit σ comme produit de cycles à supports disjoints. □

Remarque. L'ensemble $\mathscr{O}$ de la preuve ci-dessus associé à l'élément a est appelé l'*orbite* de a pour σ. On vérifie aisément que l'ensemble des orbites de σ forme une partition de $[\![1,n]\!]$, qui donne exactement les supports des cycles de la décomposition. De cette remarque découle l'unicité à ordre des facteurs près.

La preuve ci-dessus fournit directement un moyen algorithmique d'écrire une permutation en produit de cycles à supports disjoints :

- on sélectionne un élément a dans $\mathrm{Supp}(\sigma)$ (s'il y en a), et on trouve un premier cycle en déterminant son orbite,
- on procède de même avec un élément de $\mathrm{Supp}(\sigma)$ qui n'est pas dans l'orbite de a (s'il y en a), et ainsi de suite.

  Exemple. Déterminons la décomposition de $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ donnée par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  - On cherche l'orbite de 1 : $\sigma(1) = 4$, $\sigma(4) = 3$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(5) = 1$, donc le premier cycle est $(1\ 4\ 3\ 5)$.
  - On cherche l'orbite de 2 : $\sigma(2) = 6$, $\sigma(6) = 2$, donc le second cycle est $(2\ 6)$.

  Finalement, $\sigma = (1\ 4\ 3\ 5)\,(2\ 6) = (2\ 6)\,(1\ 4\ 3\ 5)$.

Par le même procédé, on obtient les décompositions des exemples ci-dessous.

Exemples.

- Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$. On a $\sigma = (1\ 3)\,(2\ 5\ 6\ 7\ 8)$.

– Soit la permutation $\tau = (2\ 3\ 5\ 4)\,(2\ 5\ 1\ 6)\,(2\ 5\ 3\ 1) \in \mathfrak{S}_6$. On a $\tau = (1\ 4\ 2)\,(3\ 6)$.

Théorème - Décomposition en produit de transpositions

Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de transposition.

Démonstration. On sait que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrit comme produit de cycles. Or comme on l'a vu ci-dessus, tout cycle s'écrit comme un produit de transpositions, ce qui conclut. □

Remarques.

– On dit que $\mathfrak{S}_n$ est *engendré* par les transpositions.
– ⚠ Il n'y a pas d'unicité dans cette décomposition, ni de commutativité. En revanche, nous allons voir que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrit de deux manières comme produit de transpositions, alors la parité du nombre de transpositions est la même dans les deux décompositions.

2. Signature

Théorème et définition - Signature d'une permutation

Il existe un unique morphisme de groupe ε de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ tel que pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\tau) = -1$.
On appelle *signature* d'une permutation le réel $\varepsilon(\sigma)$.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on dit que σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = 1$, et *impaire* si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

La démonstration est non exigible, et nous nous contentons des exemples et remarques ci-dessous, qui permettent de comprendre comment construire ε, et de calculer $\varepsilon(\sigma)$ pour une permutation σ donnée.

Exemples.

– On a $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$.
– Si γ est un k-cycle, on sait que σ est un produit de $k-1$ transpositions : $\sigma = \tau_1 \dots \tau_{k-1}$, donc comme ε est un morphisme, on a
$$\varepsilon(\gamma) = \varepsilon(\tau_1)\dots\varepsilon(\tau_{k-1}) = (-1)^{k-1}.$$

Remarques.

– L'exemple des k-cycles ci-dessus fournit un moyen de calculer la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: on écrit σ comme produit de cycles à supports disjoints : $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_m$. Alors si on note $\ell_i = |\mathrm{Supp}(\gamma_i)|$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,
$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\gamma_1)\dots\varepsilon(\gamma_m) = (-1)^{\ell_1 - 1}\dots(-1)^{\ell_m - 1}. \qquad (\star)$$
– Une permutation est paire si et seulement si elle s'écrit comme le produit d'un nombre pair de transpositions, et impaire si elle s'écrit comme le produit d'un nombre impair de transpositions.
– On peut montrer que ε est donné par :
$$\varepsilon : \sigma \mapsto \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$
Il suffit de vérifier que ε définit un morphisme de groupe de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, qui associe -1 à toute transposition.
– On déduit du point précédent que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\varepsilon(\sigma)$ désigne la parité du nombre d'*inversions* de σ, c'est-à-dire du nombre de couples (i, j) tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Dans la pratique, on pourra toujours trouver la signature d'une permutation en l'écrivant comme produit de cycles à supports disjoints, puis en utilisant $(\star)$.

Exemple. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 2 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est paire.

On écrit σ en produit de cycles à supports disjoints : $\sigma = (1\ 3\ 7)\,(2\ 4\ 6\ 8\ 5)$, donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2\,(-1)^4 = 1$.

Remarque. L'ensemble A_n des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ forme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, appelé groupe alterné. En effet, $A_n = \varepsilon^{-1}(\{1\})$ donc A_n est l'image réciproque du sous-groupe $\{1\}$ de $\{-1, 1\}$.

II Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1. Formes n-linéaires alternées

Définition - Application n-linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E^n \to F$ est dite n-linéaire sur E si f est linéaire par rapport à chaque variable, *i.e.* pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in E$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire. On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires sur E.

- Cas $n = 2$: on dit que les applications de $\mathscr{L}_2(E, F)$ sont *bilinéaires*.
- Cas $F = \mathbb{K}$: on dit que les applications de $\mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$ sont des formes n-linéaires sur E.

Exemples.

- L'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$ est une forme bilinéaire.
- L'application $g : \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $g : (A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ avec $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, le réel $\varphi(x, y)$ est l'aire algébrique du parallélogramme porté par les vecteurs de coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans le plan. L'application φ est bilinéaire.

Remarque. On peut montrer que, comme $\mathscr{L}(E, F)$, l'ensemble $\mathscr{L}_n(E, F)$ définit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition - Forme n-linéaire alternée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une n-linéaire f sur E est *alternée* si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\text{s'il existe } i, j \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } i \neq j \text{ et } x_i = x_j, \quad \text{alors} \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Autrement dit, si $(x_1, \dots, x_n)$ contient deux vecteurs égaux, alors son image par f est nulle.

Exemple. Si f, g sont deux formes linéaires sur E, alors l'application $\varphi : (x, y) \mapsto f(x)g(y) - f(y)g(x)$ définit une forme bilinéaire alternée sur E :

- l'application φ est clairement bilinéaire par linéarité de f et g,
- pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$.

Théorème - Formes n-linéaires alternées et familles liées

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f une forme n-linéaire alternée sur E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- Ajouter à un vecteur de $(x_1, \dots, x_n)$ une combinaison linéaire des autres ne change pas son image par f.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration.

- Sans perte de généralité, on ajoute à x_n une combinaison linéaire des autres vecteurs : si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$,
$$f\Big(x_1, \dots, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\Big) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i) = f(x_1, \dots, x_n)$$
car pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, comme la famille $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i)$ a deux vecteurs égaux, $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i) = 0$.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que x_k est combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$. Ainsi,
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq k} \lambda_i f(x_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{k}}{x_i}, \dots, x_n) = 0.$$
car les familles $(x_1, \dots, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{x_i}, \dots, x_n)$ contiennent deux fois le vecteur x_i. $\square$

Définition - Forme n-linéaire symétrique, antisymétrique

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire sur E. On dit que

- f est *symétrique* si pour tous $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = f(x_1,\dots,x_n)$.
- f est *antisymétrique* si pour tous $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,\dots,x_n)$.

Remarques.

- Autrement dit, f est symétrique si $f(x_1,\dots,x_n)$ est inchangé lorsqu'on change l'ordre des vecteurs $x_1,\dots,x_n$.
- Une forme n-linéaire f sur E est antisymétrique si et seulement si pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = -f(x_1,\dots,x_n).$$

En d'autres termes, échanger deux vecteurs parmi $x_1,\dots,x_n$ change le signe de $f(x_1,\dots,x_n)$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Il suffit d'appliquer l'égalité de la définition à une transposition τ, qui vérifie $\varepsilon(\tau) = -1$.

$\Leftarrow$ Si pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = -f(x_1,\dots,x_n)$, on fixe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On sait que σ s'écrit comme produit de transpositions $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, donc si $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$,

$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = f(x_{\tau_1\dots\tau_{k-1}(\tau_k(1))},\dots,x_{\tau_1\dots\tau_{k-1}(\tau_k(n))}) = -f(x_{\tau_1\dots\tau_{k-1}(1)},\dots,x_{\tau_1\dots\tau_{k-1}(n)}).$$

On obtient le résultat en réitérant l'argument. □

Exemples.

- Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, défini par $((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + yy'$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$.
- On reprend l'exemple rencontré ci-dessus : si f, g sont deux formes linéaires sur E, on considère l'application $\varphi : (x,y) \mapsto f(x)g(y) - f(y)g(x)$. Alors φ est antisymétrique :

$$\text{Si } x,y \in E, \text{ alors } \varphi(y,x) = f(y)g(x) - f(x)g(y) = -\varphi(x,y).$$

Théorème - Formes alternées et formes antisymétriques

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme n-linéaire sur E est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Démonstration. Supposons que f est alternée, et considérons $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. Montrons que pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = -f(x_1,\dots,x_n)$, ce qui conclura par la remarque ci-dessus.

Si $\tau = (i\ j)$, alors par n-linéarité et caractère alterné :

Ajout d'un vecteur à un autre

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = f(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots) &= f(\dots,x_j+x_i,\dots,x_i,\dots) \\ &= f(\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots) - f(\dots,x_i+x_j,\dots,x_j,\dots). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) = -f(\dots,x_i+x_j,\dots,x_j,\dots) = -f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)$, ce qui conclut.

Si f est antisymétrique, on considère $(x_1,\dots,x_n)$ tel que $x_i = x_j$ avec $i \neq j$. En considérant la transposition $\tau = (i\ j)$, on obtient $f(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots) = -f(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots)$. Ainsi, $f(x_1,\dots,x_n) = 0$, donc f est alternée. □

2. Déterminant

Théorème et définition - Déterminant dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée notée f sur E^n telle que $f(e_1,\dots,e_n) = 1$. On l'appelle *déterminant* dans la base $\mathscr{B}$, et on la note $\det_{\mathscr{B}}$.

Si $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Démonstration.

– **Analyse**. Soit f une forme n-linéaire alternée sur E telle que $f(e_1,\dots,e_n)=1$. On considère $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $(a_{1,i},\dots,a_{n,i})$ les coordonnées de x_i dans la base $\mathscr{B}$. Alors,

$$f(x_1,\dots,x_n) \;=\; f\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}e_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}e_{i_n}\Big) \;=\; \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n} a_{i_1,1}\dots a_{i_n,n}\, f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$$

Par n-linéarité, si deux indices i_k et i_l sont identiques, alors $f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})=0$, on somme ici sur tous les n-uplets $(i_1,\dots,i_n)$ d'éléments distincts, c'est-à-dire les $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$, où $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Autrement dit, on peut écrire :

$$f(x_1,\dots,x_n) \;=\; \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),1}\, f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) \;=\; \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\,\varepsilon(\sigma)f(e_1,\dots,e_n). \qquad (1)$$

Comme $f(e_1,\dots,e_n)=1$, f a nécessairement la forme souhaitée.

– **Synthèse**. Il est un peu technique mais pas difficile de se convaincre de la n-linéarité de l'application f définie ci-dessus. Montrons seulement que f est alternée et vérifie $(f(e_1,\dots,e_n)=1$.

  – Pour montrer que l'application f est alternée, il suffit de montrer qu'elle est antisymétrique. Considérons une permutation $\alpha\in\mathfrak{S}_n$ et $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$.
  Comme $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)})\big)_{\sigma(i),i}=\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)\big)_{\sigma(i),\alpha(i)}$, on a :

$$f(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\alpha(i)} \overset{\substack{j=\alpha(i)\\ \downarrow}}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma\alpha^{-1}(j),j} \overset{\substack{\sigma'=\sigma\alpha^{-1}\\ \downarrow}}{=} \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma'\alpha)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j),j},$$

  où les changements d'indices dans les sommes sont justifiés respectivement par le fait que α est bijective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, et que $\sigma\mapsto\sigma\alpha^{-1}$ est bijective de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$. Comme $\varepsilon(\sigma'\alpha)=\varepsilon(\sigma')\varepsilon(\alpha)$, on a bien :

$$f(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)}) \;=\; \varepsilon(\alpha)\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma')\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j),j} \;=\; \varepsilon(\alpha)f(x_1,\dots,x_n).$$

  – On a $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)=I_n$, donc

$$f(e_1,\dots,e_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\overset{=0 \text{ si } \sigma(i)\neq i}{a_{\sigma(i),i}}=\varepsilon(\mathrm{Id})\prod_{i=1}^{n}a_{i,i}=1.$$ □

Remarque. On prendra garde au fait que dans un espace vectoriel de dimension n, seul le déterminant d'une famille de n vecteurs est défini.

Corollaire - Formes *n*-linéaires alternées

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^\star$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Toute forme n-linéaire alternée f sur E s'écrit $f=\alpha\det_{\mathscr{B}}$, avec $\alpha\in\mathbb{K}$.

Démonstration. Il suffit de reprendre l'argument de la preuve précédente : si f est une forme n-linéaire alternée sur E, alors pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, on a $f(x_1,\dots,x_n)=f(e_1,\dots,e_n)\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$ d'après (1) avec les mêmes notations. Ainsi, on a le résultat en posant $\alpha=f(e_1,\dots,e_n)$. □

Remarque. On voit assez aisément que l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E,F)$. Le résultat ci-dessus assure qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 1.

Théorème - Déterminant d'une famille de deux vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 ayant pour base $\mathscr{B}$ et $x,y\in E$, de coordonnées respectives (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x,y) \;=\; x_1y_2-x_2y_1.$$

Démonstration. On a $\mathfrak{S}_2=\{\mathrm{Id},\,(1\ 2)\}$, et $\varepsilon(\mathrm{Id})=1$, $\varepsilon((12))=-1$. Par conséquent,

$$\text{en notant } A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x,y)=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix},\ \text{ on a } \det_{\mathscr{B}}(x,y) \;=\; \underset{\sigma=\mathrm{Id}}{a_{1,1}a_{2,2}}-\underset{\sigma=(1\,2)}{a_{2,1}a_{1,2}} \;=\; x_1y_2-x_2y_1.$$ □

Théorème - Règle de Sarrus

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 ayant pour base $\mathscr{B}$ et $x, y, z \in E$, de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x, y, z) \;=\; x_1x_2x_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - (x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1 + x_1y_3z_2).$$

Démonstration. On a $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$, donc en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x, y, z)$,

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x, y, z) &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}\\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2.\end{aligned}$$ □

3. Propriétés

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\, \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. En tant que forme n-linéaire alternée sur E^n, $\det_{\mathscr{B}'}$ est un multiple de $\det_{\mathscr{B}}$: il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathscr{B}'} = \alpha \det_{\mathscr{B}}$. Ainsi, $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \alpha \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \alpha$ du fait que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$. □

Théorème - Base et déterminant

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Une famille $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Démonstration.

- Si $\mathscr{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ est une base, alors $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') = 1$, donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.
- Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ (de bon cardinal) n'est pas une base, alors elle est liée. Ainsi, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. □

III Déterminant d'une matrice carrée

1. Définition

Définition - Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant* de A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det A$ ou encore $|A|$. On a donc, si $a_1, \ldots, a_n$ désignent les colonnes de A,

$$\det A \;=\; \det_{\mathscr{B}}(a_1, \ldots, a_n) \;=\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

Remarques.

- L'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $x_1, \ldots, x_n \in E$, alors par définition de $\det_{\mathscr{B}}$ et du déterminant d'une matrice,
$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)\big). \tag{2}$$

2. Propriétés

Théorème - Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i. $\det I_n \;=\; 1$.
ii. $\det(\lambda A) \;=\; \lambda^n \det A$.

iii. $\det(AB) = \det A \det B$.
iv. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et dans ce cas $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
v. $\det A^\top = \det A$.

Démonstration. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

i. On a $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$, or $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det I_n$ car $e_1, \dots, e_n$ sont les colonnes de I_n. Ainsi, $\det I_n = 1$.

ii. C'est immédiat par n-linéarité de $\det_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

iii. L'application $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(Ax_1, \dots, Ax_n)$ définit une forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{K}^n$, ceci découle assez directement du caractère n-linéaire alterné de $\det_{\mathscr{B}}$. On sait donc que $\varphi = \alpha \det_{\mathscr{B}}$, où $\alpha \in \mathbb{K}$.

On a $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \det_{\mathscr{B}}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$. Comme on a aussi $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \alpha \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \alpha$, on en déduit $\alpha = \det A$. Il suffit ensuite de remarquer que si $b_1, \dots, b_n$ désignent les colonnes de B, alors

$$\det(AB) = \det_{\mathscr{B}}(Ab_1, \dots, Ab_n) = \varphi(b_1, \dots, b_n) = \det A \det_{\mathscr{B}}(b_1, \dots, b_n) = \det A \det B.$$

iv. On sait que A est inversible si et seulement si la famille $(a_1, \dots, a_n)$ de ses vecteurs colonnes est une base de $\mathbb{K}^n$, ce qui équivaut à $\det_{\mathscr{B}}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ceci conclut car $\det A = \det_{\mathscr{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Par ailleurs, si A est inversible, alors $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$.

v. On revient à la définition du déterminant, et on effectue un changement d'indice dans le produit :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \overset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)},$$

car comme $\varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = 1$, on a $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$, du fait que $\varepsilon(\sigma \mathrm{i}\{-1, 1\}$. On peut ensuite effectuer le changement d'indice $\sigma' = \sigma^{-1}$ dans la somme, car $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. On obtient

$$\det A = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma'(j)} = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^n (A^\top)_{\sigma'(j),j} = \det A^\top.$$ □

Corollaire - Similitude et déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant.

Démonstration. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors $\det A = \det(P^{-1}) \det(P) \det(B) = \det B$. □

IV Méthodes de calcul de déterminant

1. Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème - Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Démonstration. On traite le cas où $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) > i$, alors $a_{\sigma(i),i} = 0$, donc $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = 0$. Or, par une récurrence immédiate, la seule permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(i) \leqslant i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est $\sigma = \mathrm{Id}$. Par conséquent, on a $\det A = a_{1,1} \dots, a_{n,n}$. □

Ce résultat s'étendra en 2ème année au cas des matrices triangulaires "par blocs". Ici, nous utiliserons ce résultat : si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ \star & \dots & \star & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad |A| = a_{n,n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. On sait que $|A| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$, or pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = 0$ si $\sigma(n) \neq n$.

Or les termes $a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$ avec $\sigma(n)=n$ sont exactement les termes de la forme $a_{\sigma'(1),1}\dots a_{\sigma'(n-1),n-1}a_{n,n}$ avec $\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}$. On a par ailleurs [1] $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma')$. Finalement, $|A|=\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\varepsilon(\sigma')\,a_{\sigma'(1),1}\dots a_{\sigma'(n-1),n-1}a_{n,n}$. □

2. Déterminant et opérations élémentaires

Théorème - Déterminant et opérations élémentaires

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\widehat{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A :

- en échangeant deux colonnes, alors $\det\widehat{A}=-\det A$,
- en multipliant une colonne par $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $\det\widehat{A}=\lambda\det A$,
- en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres, alors $\det\widehat{A}=\det A$.

Les résultats ci-dessus sont encore valables pour les lignes.

Démonstration. Il s'agit de conséquences immédiates du caractère alterné et de la n-linéarité. On obtient le résultat sur les lignes en considérant la transposée de A. □

Remarque. Ceci entraîne qu'on peut toujours calculer le déterminant d'une matrice en se ramenant au déterminant d'une matrice triangulaire par pivot de Gauss.

Exemple. Soit $a\in\mathbb{K}$. Déterminons le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par $A=\begin{pmatrix}a&1&\dots&1\\1&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\dots&1&a\end{pmatrix}$.

$$|A|\overset{C_n\leftarrow C_1+\dots+C_n}{=}(a+n-1)\begin{vmatrix}a&1&\dots&1\\1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&a&1\\1&\dots&1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_n\\ \vdots\\ L_{n-1}\leftarrow L_{n-1}-L_n}}{=}(a+n-1)\begin{vmatrix}a-1&0&\dots&0\\0&\ddots&0&0\\0&0&a-1&0\\1&\dots&1&1\end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1},$$

à l'aide de la remarque du paragraphe précédent.

3. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i,j\in[\![1,n]\!]$, on note $A^{(i,j)}$ la matrice extraite obtenue à partir de A en éliminant la ligne i et la colonne j.

Définition - Mineurs, cofacteurs

Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i,j\in[\![1,n]\!]$.

- On appelle *mineur* de A d'indices i,j le déterminant de $A^{(i,j)}$, on le note $\Delta_{i,j}$.
- On appelle *cofacteur* de A d'indices i,j le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Exemple. Si $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\\-2&1&1\end{pmatrix}$, alors $A^{(2,3)}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$, donc $\Delta_{2,3}=1$. Le cofacteur de A d'indices $2,3$ est -1.

Théorème - Développement par rapport à une ligne, une colonne

Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i,j\in[\![1,n]\!]$.

- *Développement par rapport à la ligne i* : on a $\det A=\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}$.
- *Développement par rapport à la colonne j* : on a $\det A=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}$.

Signe de $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-&\dots\\-&+&-&+&\\+&-&+&-&\\-&+&-&+&\\\vdots&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

1. Car, par exemple, σ et σ' ont même décomposition en produit de transpositions.

Démonstration. Montrons le résultat sur les colonnes, celui sur les lignes s'en déduit par transposition. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note $a_1, \dots, a_n$ les colonnes de A, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$$\det A \;=\; \det_{\mathscr{B}}(X_1, \dots, X_n) \;=\; \det\left(a_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, \dots, a_n\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathscr{B}}(a_1, \dots, e_i, \dots, a_n)$$

par n-linéarité. En notant $D_{i,j} = \det_{\mathscr{B}}(a_1, \dots, e_i, \dots, a_n)$, on a :

$$D_{i,j} \;=\; \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \;=\; (-1)^{i+j} \left|\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}}^{A^{(i,j)}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \end{matrix} & 1 \end{matrix}\right|,$$

où on a effectué les échanges de colonnes $C_j \leftrightarrow C_{j+1}, \dots, C_{n-1} \leftrightarrow C_n$ et de lignes $L_i \leftrightarrow L_{i+1}, \dots, L_{n-1} \leftrightarrow L_n$, soit $(n-j-1) + (n-i-1)$ transpositions au total, d'où le facteur $(-1)^{2n-i-j-2} = (-1)^{i+j}$. On conclut avec la remarque du paragraphe 1 : $D_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}|$. □

Exemples.

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors en développant par rapport à la dernière colonne :
$$|A| \;=\; -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \;=\; -6.$$
- Soit $a \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminons le déterminant de
$$A_n \;=\; \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & & a & 1+a^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$
Si $n \geqslant 3$, on obtient en développant par rapport à la première colonne :
$$|A_n| \;=\; \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \;=\; (1+a^2)\,|A_{n-1}| - a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a & & \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$
Ainsi, en développant par rapport à la première colonne dans cette dernière matrice,
$$|A_n| = (1+a^2)|A_{n-1}| - a^2 |A_{n-2}|.$$
On résout la récurrence linéaire d'ordre 2 en remarquant que son équation caractéristique $X^2 - (1+a^2)X + a^2$ a pour racines 1 et a^2, et $|A_1| = 1 + a^2$ et $|A_2| = 1 + a^2 + a^4$, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |A_n| \;=\; \frac{1 - a^{2(n+1)}}{1 - a^2} \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^{2k}.$$

4. Determinant de Vandermonde

Théorème - Déterminant de Vandermonde

Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on note
$$V(x_1, \dots, x_n) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$
On a $V(x_1, \dots, x_n) \;=\; \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur n.

- *Cas $n = 1$.* On a $V(x_1) = 1$, et le produit ci-dessus est vide donc égal à 1. Ainsi, le résultat est vrai pour $n = 1$.

– Soit un entier $n \geqslant 2$. On suppose que le résultat est vrai pour $n-1$, et on le montre au rang n. On considère $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On a en effectuant les opérations $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

où on a développé par rapport à la première ligne dans ce dernier calcul. Ainsi, en factorisant :

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} (x_j - x_1)\, V(x_2, \dots, x_n).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} (x_j - x_1) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$, d'où le résultat en regroupant les produits. □

Remarque. En particulier, si $n \in \mathbb{N}^\star$, la matrice de Vandermonde $(x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Ce résultat peut se retrouver plus simplement en remarquant que, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\mathscr{B}'$ la base canonique que $\mathbb{K}^n$, et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \quad \text{on a} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

– S'il existe deux scalaires x_i égaux, alors la matrice de Vandermonde a deux lignes égales, elle n'est donc pas inversibles.
– Sinon, $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ car tout polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui a n racines est nul. Par conséquent, f est un isomorphisme et la matrice de Vandermonde est inversible.

On peut également voir que f est un bijectif si les x_i sont deux à deux distincts en se rappelant que tout n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ a un unique antécédent par f donné par le polynôme interpolateur de Lagrange associé.

5. Comatrice et inverse

Définition - Comatrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A, on la note $\mathrm{Com}(A)$: pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{Com}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = (\det A)\, I_n.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a

$$(A\,\mathrm{Com}(A)^\top)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,\mathrm{Com}(A)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = \det A$$

car on reconnaît le développement de A par rapport à la ligne i. Si maintenant $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, alors

$$(A\,\mathrm{Com}(A)^\top)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\mathrm{Com}(A)_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}.$$

On reconnaît cette fois le développement par rapport à la ligne j de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa ligne j par sa ligne i. Comme cette dernière matrice a deux lignes égales, elle est de déterminant nul. Ceci entraîne

que $(A\,\mathrm{Com}(A)^\top)_{i,j} = 0$. Nous avons donc bien montré que $A\,\mathrm{Com}(A)^\top = (\det A)\,I_n$.
La seconde égalité se montre de la même manière, en faisant cette fois intervenir des développements par rapport aux colonnes. □

Corollaire - Inverse et comatrice

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^\top$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessus. □

Remarque. La relation ci-dessus sera utilisée essentiellement dans un contexte théorique, sauf éventuellement dans le calcul d'inverse de matrices de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$. Elle fournit certes une expression explicite de l'inverse d'une matrice, mais le coût de calcul de $\frac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^\top$ est souvent bien supérieur aux méthodes d'inversion connues.

V Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.
Nous avons vu que deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même déterminant. Par conséquent toutes les matrices d'un endomorphisme fixé $f \in \mathscr{L}(E)$ ont même déterminant. Ce scalaire sera défini comme le déterminant de l'endomorphisme f.

Définition-théorème - Déterminant d'un endomorphisme

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on appelle *déterminant* de f le scalaire

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f).$$

Ainsi défini, le scalaire $\det f$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$, et $\det f = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Démonstration. Comme nous l'avons vu, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\, f$ sont semblables, donc elles ont même déterminant.
Par ailleurs, on a $\det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f)$. □

Théorème

Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On a

$$\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det(f)\, \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n))) &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))\ \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)),\end{aligned}$$

d'où le résultat car $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) = \det f$ et $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. □

Il est intéressant d'avoir une interprétation géométrique du déterminant d'une famille de vecteurs en terme de "volume" dans $\mathbb{R}^n$. Nous proposons ici cette interprétation sans démonstration, ces résultats dépassant le cadre du programme.

Interprétation géométrique. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on considère une base $\mathscr{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

- *Cas* $n = 2$. La quantité $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ est égale à l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs x_1, x_2.
- *Cas* $n = 3$. La quantité $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3)$ est égale au volume du parallélépipède porté par x_1, x_2, x_3.

Plus généralement, le réel $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est égal au volume n-dimensionnel (algébrique) du parallélépipède porté par les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. Ainsi, l'égalité

$$\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det(f)\, \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

valable pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ exprime que l'endomorphisme f multiplie les volumes par un facteur constant, donné par $\det(f)$.

Nous terminons par des propriétés du déterminant d'un endomorphisme, qui sont immédiatement déduites des propriétés du déterminant d'une matrice carrée.

Théorème - Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On a :

- $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$,
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$,
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$,
- f est un automorphisme de E si et seulement si $\det f \neq 0$, et dans ce cas $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Démonstration. Si on fixe une base $\mathscr{B}$ de E, on sait que $\det(\varphi) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi))$ pour tout endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Par conséquent, tous ces résultats sont des conséquences directes des propriétés du déterminant des matrices rencontrées précédemment. □

Corollaire

L'application det induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^\star$.

Démonstration. Le déterminant d'un automorphisme de E est non nul, donc on a bien $\det(\mathrm{GL}(E)) \subset \mathbb{K}^\star$, et par le théorème précédent, pour tous $f, g \in \mathrm{GL}(E)$, on a $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$. □