

Chapitre 25

# Équations différentielles

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $I$  un intervalle non réduit à un point.

## I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur  $I$  est une équation qui prend la forme

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{1}$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues sur  $I$ . On dit que  $y$  est une solution de (1) si  $y$  est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $I$  telle que pour tout  $x \in I$ ,  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ .

⚠ L'écriture (1) est à réserver pour l'écriture des équations différentielles. Lorsqu'on manipule une solution  $y$  de l'équation, on respecte les usages habituels, et on écrit  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$  pour  $x \in I$ .

**Remarques.**

- Si  $y$  est solution de (1), alors  $y' = -ay + b$ , donc  $y'$  est une fonction continue. Ceci entraîne que  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $I$ .
- Il arrive qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 soit présentée sous la forme  $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ . Si  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ , on peut se ramener à l'équation

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

qui est de la forme de (E), on dit que l'équation est sous forme *résolue*. Si  $a$  ne s'annule sur  $I$ , la situation est tout autre, et il convient de résoudre l'équation sur des sous-intervalles où  $a$  ne s'annule pas.

### 1. Équation homogène

**Théorème - Équation homogène**

Soit  $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Les solutions de l'équation homogène

$$y' + a(x)y = 0 \tag{H}$$

sont exactement les fonctions de la forme  $y : x \mapsto \lambda e^{-Ax}$ , où  $\lambda \in \mathbb{K}$ , et  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ . Par conséquent, l'ensemble des solutions de (H) est donné par  $\text{Vect}(e^{-A})$ .

**Démonstration.** Soit  $y$  une solution sur  $I$  de l'équation  $y' + a(x)y = 0$ . On pose  $z : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ , où  $A$  désigne une primitive de  $a$  sur  $I$ . La fonction  $z$  est dérivable sur  $I$  par composition, et pour tout  $x \in I$ , on a

$$z'(x) = (y'(x) + a(x)y(x)) e^{A(x)} = 0.$$

Par conséquent,  $z$  est constante sur  $I$ , et on note  $\lambda$  sa valeur constante. Ainsi, pour tout  $x \in I$ , on a  $y(x)e^{A(x)} = \lambda$ , ce qui entraîne que  $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$ .

Réciproquement, il est clair que toute fonction de la forme  $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$  est solution de l'équation, ce qui conclut.  $\square$

**Remarque.** La structure de l'espace des solutions était déjà connue : en remarquant que

$$\varphi : y \mapsto y' + ay$$

définit une application linéaire de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  dans  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ , on constate que l'ensemble des solutions de (H) est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire  $\varphi(y) = 0$ , c'est-à-dire  $\text{Ker } \varphi$ .

**Exemple.** Les solutions sur  $] -1, 1[$  de l'équation différentielle  $\sqrt{1-x^2}y' + y = 0$  sont les solutions de l'équation

$$y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \text{qui sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda e^{\arccos x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

## 2. Équation avec second membre, problème de Cauchy

### Théorème - Équation avec second membre

Soient  $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . L'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

admet des solutions, qui sont exactement les fonctions de la forme  $y_p + y$ , où  $y_p$  est une solution particulière de (E) et  $y$  est une solution de l'équation homogène  $y' + a(x)y = 0$ .

**Démonstration.** Montrons tout d'abord que (E) admet une solution : on remarque que si  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  et  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ , alors  $(ye^A)' = (y' + ay)e^A$ , donc

$$y \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow y' + ay = b \Leftrightarrow (y' + ay)e^A = be^A \Leftrightarrow (ye^A)' = be^A.$$

Ainsi, si  $x_0 \in I$ , on obtient une solution de (E) en posant

$$y_p : x \mapsto \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)-A(x)} dt$$

car on a alors bien  $\frac{d}{dx}(y_p(x)e^{A(x)}) = b(x)e^{A(x)}$ . Il suffit ensuite de remarquer que

$$y \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow y' - ay = y'_p - ay \Leftrightarrow (y - y_p)' - a(y - y_p) \Leftrightarrow y - y_p \text{ est solution de (H)}. \quad \square$$

**Remarque.** Nous retrouvons ici que l'ensemble des solutions de (E) forme un sous-espace affine qui a pour direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Ce résultat était déjà connu car l'équation (E) n'est autre que l'équation linéaire

$$\varphi(y) = b,$$

où  $\varphi : y \mapsto y' + ay$  est l'application linéaire introduit plus haut. On sait que l'ensemble des solutions est le sous-espace affine  $y_p + \text{Ker } \varphi$ .

Dans la pratique, la recherche de solution particulière de l'équation (E) suivant la méthode de la preuve ci-dessus peut se faire de la manière suivante, appelée *variation de la constante*. Elle consiste à partir d'une solution  $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$  de l'équation homogène et à considérer la constante  $\lambda$  comme une fonction.

### Variation de la constante.

On cherche une solution de (E) sous la forme  $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ , où  $\lambda$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  à déterminer. L'équation devient :

$$\lambda'e^{-A(x)} = b(x), \quad \text{soit} \quad \lambda' = b(x)e^{A(x)}.$$

Il reste à intégrer la relation obtenue pour trouver  $\lambda$  et obtenir une solution particulière.

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que si  $y : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ , alors sur  $I$ , on a :

$$y' + ay = \lambda'e^{-A} - \lambda ae^{-A} + a\lambda e^{-A} = \lambda'e^{-A}. \quad \square$$

**Exemple.** Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$ .

- *Équation homogène.* Les solutions de l'équation  $y' + y = 0$  sont les fonctions de la forme  $y : x \mapsto \lambda e^{-x}$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- *Solution particulière.* On cherche une solution sous la forme  $y : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$ . L'équation devient

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x}, \quad \text{soit} \quad \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

dont  $x \mapsto \ln(1 + e^x)$  est une solution. Une solution particulière est donc donnée par  $x \mapsto \ln(1 + e^x)e^{-x}$ .

**Conclusion.** Les solutions sont les fonctions de la forme  $y : x \mapsto (\ln(1 + e^x) + \alpha)e^{-x}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Corollaire - Problème de Cauchy**

Soient  $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ ,  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ . Le problème suivant, appelé *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (C)$$

admet une unique solution  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Démonstration.** D’après la preuve du théorème précédent, on sait que les fonctions vérifiant  $\forall x \in I, y' + a(x)y = b(x)$  sont exactement les fonctions de la forme  $y = y_p + \lambda e^{-A}$ , où  $y_p$  est une solution particulière et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On remarque alors que  $y$  est solution de (C) si et seulement si de plus  $y_0 = y_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)}$ , c’est-à-dire  $\lambda = (y_0 - y_p(x_0))e^{A(x_0)}$ .  $\square$

**Théorème - Principe de superposition**

Si  $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et  $y_1, y_2$  sont des solutions respectives des équations différentielles  $y' + a(x)y = b_1(x)$  et  $y' + a(x)y = b_2(x)$ , alors  $y_1 + y_2$  est solution de  $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ .

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que par linéarité, si  $y_1' + ay_1 = b_1$  et  $y_2' + ay_2 = b_2$  sur  $I$ , on obtient en sommant que  $(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$ .  $\square$

## II Équations différentielles linéaires d’ordre 2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire d’ordre 2 à coefficients constants sur  $I$  est une équation qui prend la forme

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (2)$$

où  $a, b \in \mathbb{K}$  et  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . On dit que  $y$  est une solution de (2) si  $y$  est une fonction définie et deux fois dérivable sur l’intervalle  $I$  telle que pour tout  $x \in I$ ,  $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ .

**⚠** Cette fois, les coefficients  $a, b$  ne sont pas des fonctions mais des scalaires, le programme limite l’étude des équation d’ordre 2 au cas de coefficients constants.

### 1. Équation homogène

L’étude est très analogue à celle des suites récurrentes linéaires d’ordre 2. On introduit de la même manière le polynôme caractéristique associé à l’équation :

$$C = X^2 + aX + b.$$

Comme pour les suites, la fonction  $y : x \mapsto e^{rx}$  est solution de l’équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$  si et seulement si  $C(r) = 0$ . Par ailleurs, si  $r$  est racine double de  $C$ , alors  $y : x \mapsto xe^{rx}$  est solution également.

**Théorème - Équation homogène, cas complexe**

Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . On note  $C = X^2 + aX + b$  le polynôme caractéristique de l’équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ .

- Si  $C$  admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors les solutions de l’équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- Si  $C$  admet une seule racine  $r_0$ , alors les solutions de l’équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

**Démonstration.** Soit  $\Delta$  le discriminant de  $C$ . On considère  $y$  une solution de l’équation homogène et  $r$  une racine de  $C$ . On note  $g : x \mapsto y(x)e^{-rx}$  de sorte que  $y(x) = g(x)e^{rx}$  pour tout  $x \in I$ . Comme  $y'' + ay' + by = 0$ , on en déduit que

$$(g''(x) + (2r + a)g'(x) + (r^2 + ar + b)g(x))e^{rx} = 0.$$

Comme  $C(r) = r^2 + ar + b = 0$ , on a  $g'' + (2r + a)g' = 0$  sur  $I$ , et  $g'$  est solution de l’équation  $z' + (2r + a)z = 0$ .

- Si  $2r + a = 0$ , c'est-à-dire  $C'(r) = 0$ , ce qui équivaut à  $\Delta = 0$ , alors  $g'$  est constante sur  $I$ , donc  $g$  est de la forme  $g : x \mapsto \lambda x + \mu$  où  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Finalement,  $y$  s'écrit  $y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ .
- Si  $2r + a \neq 0$ , c'est-à-dire si  $\Delta \neq 0$ , on en déduit que  $g'$  est de la forme  $g' : x \mapsto \gamma e^{-(2r+a)x}$  où  $\gamma \in \mathbb{C}$ , donc  $g$  est de la forme  $g : x \mapsto \lambda e^{-(2r+a)x} + \mu$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

Finalement,  $y$  s'écrit alors  $y : x \mapsto \lambda e^{-(r+a)x} + \mu e^{rx}$ . Si on note  $r'$  l'autre racine de  $C = X^2 + aX + b$ , les relations coefficients-racines donnent que  $a = -(r + r')$ , donc  $r' = -(r + a)$ , et  $y$  s'écrit bien  $y : x \mapsto \lambda e^{r'x} + \mu e^{rx}$ .

Réciproquement, d'après ce qui précède, les fonctions décrites ci-dessus sont toutes solutions de l'équation homogène, ce qui conclut. □

**Remarque.** Nous avons alors montré que l'ensemble des solutions de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ , dont une base est donnée par

- la famille  $(x \mapsto e^{r_1x}, x \mapsto e^{r_2x})$  dans le premier cas,
- la famille  $(x \mapsto e^{r_0x}, x \mapsto xe^{r_0x})$  dans le second cas.

**Théorème - Équation homogène, cas réel**

Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . On note  $C = X^2 + aX + b$  le polynôme caractéristique de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ .

- Si  $C$  admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si  $C$  admet une seule racine  $r_0$ , alors les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si  $C$  admet deux racines complexes conjuguées  $re^{i\theta}$  et  $re^{-i\theta}$ , alors les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto (\lambda \cos(\theta x) + \mu \sin(\theta x)) e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration.**

- Les deux premiers cas correspondent aux cas  $\Delta > 0$  et  $\Delta = 0$ , traités dans le théorème précédent. On voit aisément que les solutions réelles correspondent au cas où  $\lambda, \mu$  sont réels.
- Examinons le troisième cas : le théorème précédent assure que les solutions complexes sont les fonctions de la forme  $y : x \mapsto e^{rx}(\lambda e^{i\theta x} + \mu e^{-i\theta x})$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Ainsi les solutions réelles sont les fonctions de cette forme dont la partie imaginaire est identiquement nulle. Si  $y$  est une telle fonction, alors en évaluant en 0 et en  $\frac{\pi}{2\theta}$ , on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu \in \mathbb{R} \\ i\lambda - i\mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \Im(\lambda + \mu) = 0 \\ \Im(i\lambda - i\mu) = 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \Im \lambda = -\Im \mu = 0 \\ \Re \lambda = \Re \mu \end{cases} \quad \text{ce qui entraîne} \quad \mu = \bar{\lambda}.$$

En notant  $\lambda = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a alors  $y(x) = e^{rx}(2\alpha \cos x - 2\beta \sin x)$  pour tout  $x \in I$ , donc  $y$  est de la forme souhaitée. Réciproquement, une fonction de cette forme est bien réelle, ce qui conclut. □

**Remarque.** Nous avons montré que dans chacun des cas que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$  de dimension 2.

**Exemples.**

- On considère l'équation  $y'' - y = 0$ . Les polynôme caractéristique associé est  $X^2 - 1$  qui a pour racines 1 et  $-1$ . Les solutions réelles sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
On peut remarquer que les fonctions ch et sh sont également solutions de l'équation. Comme (ch, sh) est une famille libre, c'est aussi une base de l'espace des solutions, qui sont alors de la forme  $\lambda \text{ch} + \mu \text{sh}$ .
- On considère l'équation  $y'' + 2y' + 2y = 0$ . Le polynôme caractéristique associé est  $X^2 + 2X + 2$ , qui a pour racines  $1 + i$  et  $1 - i$ . Les solutions réelles sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- On considère l'équation  $y'' + 9y = 0$ . Le polynôme caractéristique associé est  $X^2 + 9$ , qui a pour racines  $3i$  et  $-3i$ . Les solutions réelles sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto (\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x))$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

## 2. Équation avec second membre

Le théorème suivant est admis par le programme.

### Théorème - Équation avec second membre, problème de Cauchy

Soient  $a, b \in \mathbb{K}$  et  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ , et l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x). \quad (E_2)$$

- L'équation  $(E_2)$  admet des solutions, qui sont exactement les fonctions de la forme  $y_p + y$ , où  $y_p$  est une solution particulière de  $(E_2)$  et  $y$  une solution de l'équation homogène.
- Si  $x_0 \in I$  et  $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ , alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (C_2)$$

admet une unique solution sur  $I$ .

**Démonstration.** Montrons l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy. On procède comme dans la preuve du théorème de l'équation homogène : si  $y$  est une solution et  $r$  une racine de  $X^2 + aX + b$ , on pose  $g : x \mapsto y(x)e^{-rx}$  de sorte que pour tout  $x \in I$ ,  $y(x) = g(x)e^{rx}$ . Comme précédemment, on obtient :

$$\forall x \in I, g''(x) + (2r + a)g'(x) = f(x)e^{-rx} \quad \text{donc} \quad g' \text{ est solution de } z' + (2r + a)z = f(x)e^{-rx}.$$

Par ailleurs, on a  $g'(x_0) = (y'_0 - ry_0)e^{-rx_0}$ . On considère l'unique solution  $z$  du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z' + (2r + a)z = f(x)e^{-rx} \\ z(x_0) = (y'_0 - ry_0)e^{-rx_0} \end{cases}$$

Ainsi,  $g$  est l'unique fonction telle que  $g' = z$  et  $g(x_0) = y_0e^{-rx_0}$ . Ceci donne l'unicité pour le problème de Cauchy.

Réciproquement, si  $y : x \mapsto g(x)e^{rx}$  où  $g$  est la fonction définie ci-dessus, alors l'analyse précédente entraîne que  $y$  est bien solution du problème de Cauchy. Ceci donne en particulier l'existence de solutions pour l'équation  $(E_2)$ .  $\square$

## 3. Recherche de solutions particulières

Nous considérons ici une catégorie de seconds membres fréquemment rencontrés pour lesquels on peut anticiper la forme d'une solution particulière de l'équation différentielle  $(E_2)$ , de polynôme caractéristique  $C = X^2 + aX + b$ .

Si  $P$  est une fonction polynomiale et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , nous considérons l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = P(x)e^{\alpha x}$$

Il semble alors naturel de chercher une solution particulière sous la forme  $y : x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ , où  $Q$  est polynomiale. Dans ce cas, on observe que pour tout  $x \in I$ ,

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = \underbrace{(Q''(x) + (2\alpha + a)Q'(x))}_{=C'(\alpha)} + \underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)Q(x)}_{=C(\alpha)} e^{\alpha x}.$$

On constate alors que :

- si  $C(\alpha) \neq 0$ , alors en choisissant  $\deg Q = \deg P$ , les polynômes  $Q'' + (2\alpha + a)Q' + (\alpha^2 + a\alpha + b)Q$  et  $P$  ont même degré, et en identifiant les coefficients, on peut trouver un polynôme  $Q$  qui convient,
- si  $C(\alpha) = 0$  et  $C'(\alpha) \neq 0$ , c'est-à-dire que  $\alpha$  est de multiplicité 1 pour  $C$ , il faut cette fois choisir  $\deg Q = \deg P + 1$  pour que les polynômes  $Q'' + (2\alpha + a)Q'$  et  $P$  aient même degré,
- si  $C(\alpha) = C'(\alpha) = 0$ , c'est-à-dire que  $\alpha$  est de multiplicité 2 pour  $C$ , il faut cette fois choisir  $\deg Q = \deg P + 2$  pour que les polynômes  $Q''$  et  $P$  aient même degré.

Ceci permet d'obtenir le théorème suivant.

### Théorème - Solution particulière

Soient  $a, b, \alpha \in \mathbb{K}$  et  $P$  une fonction polynomiale. On note  $k$  la multiplicité de  $\alpha$  pour le polynôme  $X^2 + aX + b$ .

L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = P(x)e^{\alpha x}$$

admet une solution sous la forme  $y_p : x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ , où  $Q$  est polynomiale, avec  $\deg Q = \deg P + k$ .

### Remarques.

- Si  $\alpha$  n'est pas racine de  $C = X^2 + aX + b$ , on rappelle que sa multiplicité pour  $C$  est 0.
- Si  $\alpha$  est de multiplicité 1 pour  $C$ , on peut en fait trouver une solution de l'équation sous la forme  $x \mapsto xQ(x)e^{\alpha x}$  où  $\deg Q = \deg P$ , du fait que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$  est solution de l'équation homogène. Plus généralement :

Si  $\alpha$  est de multiplicité  $k$  pour  $C$ , alors  $(E_2)$  admet une solution sous la forme  $x \mapsto x^k Q(x)e^{\alpha x}$ , où  $\deg Q = \deg P$ .

### Cas particuliers

$y'' + ay' + by = P(x)$  : où  $P$  est une fonction polynomiale, et  $b \neq 0$ .

L'équation admet une solution polynomiale  $Q$ , de même degré que  $P$ .

$y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$  : où  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

- Si  $\alpha$  n'est pas racine de  $C$ ,  $(E_2)$  admet une solution de la forme  $y_p : x \mapsto ae^{\alpha x}$  avec  $a \in \mathbb{K}$ .
- Si  $\alpha$  est racine de  $C$  de multiplicité  $k$ ,  $(E_2)$  admet une solution de la forme  $y_p : x \mapsto ax^k e^{\alpha x}$  avec  $a \in \mathbb{K}$ .

### Exemple.

- On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y'' + 2y' + y = xe^x$ .

Le polynôme caractéristique  $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$  a pour seule racine  $-1$ , donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

On cherche une solution particulière sous la forme  $y : x \mapsto (ax + b)e^x$ . On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} y(x) = (ax + b)e^x \\ y'(x) = (ax + b + a)e^x \\ y''(x) = (ax + b + 2a)e^x \end{cases} \quad \text{donc} \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (4ax + 4a + 4b)e^x.$$

Ceci nous conduit à poser  $a = \frac{1}{4}$  et  $b = -\frac{1}{4}$ , ce qui donne la solution particulière  $y_p : x \mapsto \frac{1}{4}(x - 1)e^x$ .

Les solutions sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} + \frac{1}{4}(x - 1)e^x$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .