

Chapitre 24

Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Séries numériques

1. Généralités

Définition - Série

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle *série* de terme général u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que S_n est la somme partielle de rang n de la série.
- La série $\sum u_n$ est convergente si $(S_n)_n$ converge, et divergente sinon.

Remarques.

- Le rang initial d'une série n'est pas toujours 0, mais peut être tout entier n_0 , on note alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.
- Pour toute série $\sum u_n$, de sommes partielles notées S_n , on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Définition - Somme et restes

Soit $\sum u_n$ une série convergente.

- On appelle *somme* de la série la limite de la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles, qu'on note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- On appelle *reste d'ordre n* de la série $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k$, noté $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarques.

- Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou non.
- La nature de la série $\sum u_n$ ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n) .
- On ne peut parler de somme et de restes que pour une série convergente.
- Comme pour une suite, on ne peut écrire la somme d'une série qu'après avoir justifié sa convergence.
- ⚠ On veillera à ne pas confondre $\sum u_n$, $\sum_{k=0}^n u_k$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemples.

- ◇ $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, de somme $\frac{3}{2}$: on a $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
- ◇ $\sum n$ est divergente : on a $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- ◇ $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, de somme 1 : on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Théorème

Si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Démonstration. Si $\sum u_n$ converge, la suite $(S_n)_n$ converge vers un réel S . Ainsi, $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$. $\square$

Remarques.

- Par contraposée, si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.
-  La réciproque est fautive ! On peut avoir $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, mais $\sum u_n$ diverge.

Série harmonique. La série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique* est divergente.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

car pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Si la suite (H_n) convergeait vers un réel H , on aurait $H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H - H = 0$, ce qui n'est pas vrai d'après ce qui précède. Ainsi, la série diverge. $\square$

Exemples. Les séries $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $\sum (n-2^n)$, $\sum (-1)^n$ divergent grossièrement.

Théorème - Lien suites-séries

Soit (u_n) une suite réelle.

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \right)$ est de même nature que la suite (u_{n+1}) , donc de même nature que (u_n) . $\square$

Remarque. Ce résultat est souvent utilisé, dans un sens comme dans l'autre : pour déterminer la nature d'une suite à partir d'une série, ou d'une série à partir d'une suite.

2. Séries et opérations**Théorème - Séries et opérations**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge également, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \Re u_n$ et $\sum \Im u_n$ convergent.

 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien en déduire sur la nature de $\sum (u_n + v_n)$. Par exemple, $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum -\frac{1}{n}$ sont divergentes, mais $\sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ converge.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe des résultats sur les suites, appliqués à la suite des sommes partielles des séries. $\square$

3. Séries géométriques, série exponentielle

Théorème – Séries géométriques

Si $x \in \mathbb{K}$, la série $\sum x^n$, dite *série géométrique*, converge si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Démonstration.

- Si $|x| \geq 1$, alors $(|x|^n)$ ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Si $|x| < 1$, alors $S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x}$, donc la série converge et sa somme est $\frac{1}{1-x}$. $\square$

Remarque. Plus généralement, si $|x| < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}$.

$$\text{En effet, } \sum_{k=n_0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k - S_{n_0-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n_0}}{1-x} = \frac{x^{n_0}}{1-x}.$$

Exemple. La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$, converge, et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Théorème – Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Remarque. Ce résultat a déjà été démontré dans $\mathbb{R}$ dans le chapitre INTÉGRATION à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Nous allons adapter cette preuve pour qu'elle convienne dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère la fonction $f : t \mapsto e^{tz}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, donc on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$ pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier, on a $f^{(k)}(0) = z^k$.

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|f^{(n+1)}(t)| = |z|^{n+1} |e^{tz}| \leq e^{|tz|} \leq e^{|z|}$. Ainsi, on a

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq e^{|z|} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $|z|^{n+1} = o((n+1)!)$ par croissance comparée. Ceci entraîne $e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc conclut. $\square$

Exemple. En particulier, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

4. Comparaison série-intégrale, séries de Riemann

Afin de déterminer la nature d'une série ou de trouver un équivalent des sommes partielles (ou des restes), il est parfois utile de comparer une série à une intégrale.

Ceci est possible lorsque la série s'écrit $\sum f(n)$, où f est une fonction monotone, continue. Nous considérerons le cas où f est décroissante ici, le cas croissant étant une simple adaptation.

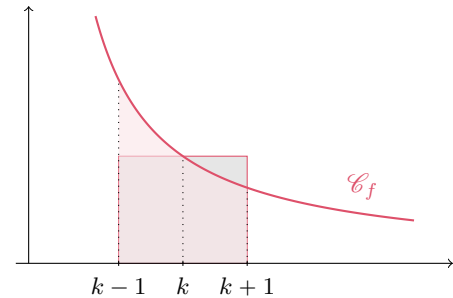
On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- comme pour tout $x \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(x)$,

$$\int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx, \quad \text{donc} \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx.$$

- comme pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$,

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx, \quad \text{donc} \quad \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$



Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt. \quad (*)$$

Comme cette relation est vraie pour tout entier k , on a $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt$. D'où

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(x) dx. \quad (**)$$

Théorème - Comparaison série-intégrale

Si f est une fonction réelle continue, positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(t) dt.$$

Démonstration. Les hypothèses sur f assurent que $(**)$ est valable.

- On a $\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \int_1^n f(x) dx$, car f est positive.
- En sommant $(*)$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on obtient $\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx$, donc $\sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$. $\square$

Remarques.

- Dans le cas où la fonction f est croissante, les formules restent valables avec les inégalités dans l'autre sens.
- On pensera à ce résultat pour obtenir un équivalent des sommes partielles en cas de divergence de $\sum u_n$.

Théorème - Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, dite de Riemann, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, décroissante, positive sur $[1, +\infty[$.

- Cas $\alpha < 1$: par comparaison avec une intégrale, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- Cas $\alpha = 1$: ce résultat est déjà traité, mais nous allons le montrer avec une comparaison série intégrale

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^n = \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- Cas $\alpha > 1$: par comparaison avec une intégrale,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

La suite (S_n) est croissante et majorée d'après ce qui précède, donc elle converge. □

Exercice 1. *Série de Bertrand.* Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.