

## Chapitre 23

# Représentation matricielle des applications linéaires

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Matrices et applications linéaires

### 1. Représentation matricielle

#### Définition - Matrice d'un vecteur dans une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ayant pour base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $x \in E$  de coordonnées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  dans la base  $\mathcal{B} : x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . On appelle matrice du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice colonne de ses coordonnées :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

**Exemples.**

- Si  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- Si  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(X^2 - 2X + 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

#### Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

$$\begin{aligned} \text{L'application } \varphi : E &\rightarrow \mathbb{K}^n & \text{est un isomorphisme.} \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

**Démonstration.** Soient  $x, y$  deux vecteurs et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On note  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  les coordonnées respectives de  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Ainsi,

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) e_i, \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + y) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + y_n \end{pmatrix} = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Par conséquent,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  est linéaire.

Par ailleurs, si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0_{n,1}$ , alors les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont toutes nulles, donc  $x = 0_E$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \{0_E\}$ , et  $\varphi$  est injective. Comme  $\dim E = \dim \mathbb{K}^n = n$ , l'application  $\varphi$  est un isomorphisme.  $\square$

#### Définition - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , et  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle matrice de  $(x_1, \dots, x_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont la  $j$ -ème colonne est  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j)$ . On note cette matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ .

**Exemples.** 1. Soient  $x_1 = (1, 1, 1)$ ,  $x_2 = (2, 2, 1)$  et  $x_3 = (0, -1, 0)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

où  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Si maintenant on considère  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ , avec  $e'_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e'_2 = (1, 1, 0)$  et  $e'_3 = (1, 0, 0)$ , qui est une autre base de  $\mathbb{R}^3$ , alors

$$\begin{cases} x_1 = e'_1 &= e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3, \\ x_2 = e'_1 + e'_2 &= e'_1 + e'_2 + 0e'_3, \\ x_3 = -e'_2 + e'_3 &= 0e'_1 - e'_2 + e'_3 \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, x_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

2. Soient  $P = 1 + 2X + X^2$  et  $Q = 2 + X + X^2$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

– Si  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

– Si  $\mathcal{B}' = (1, 1+X, X+X^2)$ , alors  $P = (1+X) + (X+X^2)$ ,  $Q = 2 + (X+X^2)$ , donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Remarque.** La matrice de la famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$ .

### Définition - Matrice d'une application linéaire

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on appelle matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ . On la note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{array} \right] \end{matrix}.$$

$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)) \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_2)) \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_p))$

### Remarques.

- On note parfois  $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ , de sorte qu'on peut écrire  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B}))$ .
- *Cas d'un endomorphisme* : si  $E = F$  et si la base  $\mathcal{B}$  est choisie au départ et à l'arrivée, on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  au lieu de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ .
- Si  $n = \dim E$ , on a toujours  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$ .
- Si on note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et  $a_{i,j}$  les coefficients de  $A$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , les coordonnées de  $f(e_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$  sont  $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$  :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i.$$

### Exemples.

1. Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  donnée par  $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, x - z)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  les bases canoniques respectives de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ . Comme on a

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) = (2, 0) = 2\varepsilon_1, \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, -1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \end{cases}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si on change la base d'arrivée en  $\mathcal{C}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ , où  $\varepsilon'_1 = (1, 1)$  et  $\varepsilon'_2 = (-1, 1)$ , alors  $f(e_1) = (1, 1) = \varepsilon'_1$ ,  $f(e_2) = (2, 0) = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$ , et  $f(e_3) = (1, -1) = -\varepsilon'_2$ , donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$  définie par  $f : P \mapsto XP' + P(1)$ , et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(1) = 1, \\ f(x) = 1 + X, \\ f(X^2) = 1 + 2X^2. \end{cases}$$

3. Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  définie par  $f : M \mapsto M - 2^t M$ , et  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(E_{1,1}) & f(E_{1,2}) & f(E_{2,1}) & f(E_{2,2}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(E_{1,1}) = -E_{1,1}, \\ f(E_{1,2}) = E_{1,1} - 2E_{2,1}, \\ f(E_{2,1}) = -2E_{1,2} + E_{2,1}, \\ f(E_{2,2}) = -E_{2,2}. \end{cases}$$

**Remarque.** Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ , alors pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , la matrice de l'application  $\text{Id}_E$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice identité  $I_n$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Théorème - Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  les bases canoniques respectives de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ . L'application linéaire canoniquement associée à  $A$  donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{K}^p &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

a pour matrice  $A$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  :  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A) = A$ .

**Démonstration.** On note  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $A$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $\varphi_A(e_j) = Ae_j = C_j$ . Comme  $\mathcal{C}$  est la base canonique, on a  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(C_j) = C_j$ . Finalement, la  $j$ -ème colonne de  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A)$  est  $C_j$ , en d'autres termes, on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A) = A$ .  $\square$

## 2. Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur

### Théorème - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  des bases respectives de  $E$  et  $F$ . Pour tout  $x \in E$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

**Démonstration.** On écrit  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$  où  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ , et on note  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ ,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ . On a

$$f(x) = \sum_{j=1}^p x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j \right) \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n (AX)_i \varepsilon_i$$

On en déduit que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \begin{pmatrix} (AX)_1 \\ \vdots \\ (AX)_n \end{pmatrix} = AX = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ .  $\square$

**Exemple.** On reprend l'exemple ci-dessus :  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  est définie par  $f : P \mapsto XP' + P(1)$ . À l'aide de la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  calculée ci-dessus, on peut calculer l'image par  $f$  du polynôme  $P = 1 - X + 2X^2$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(P)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors bien que  $f(P) = 2 - X + 4X^2$ .

**Remarques.**

- On peut aisément généraliser ce résultat à une famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p).$$

- Le résultat ci-dessus permet de faire des calculs de noyaux et d'image d'une application linéaire  $f$  en calculant le noyau et l'image d'une matrice de  $f$  : en effet, si  $x \in E$  et  $y \in F$ , alors en notant  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ ,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X \in \text{Ker } A \\ y \in \text{Im } f &\Leftrightarrow \exists x \in E, y = f(x) \Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^p, Y = AX. \end{aligned}$$

**Exemple.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  donnée par

$$f : P \mapsto 2P - (X+1)P'.$$

Comme  $f(1) = 2$ ,  $f(X) = X - 1$ , et  $f(X^2) = -2X$ , la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  est

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- Déterminons  $\text{Ker } f$  : si  $P = a + bX + cX^2$ , on a  $P \in \text{Ker } f$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = 0_{3,1}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}.$$

Ainsi,  $P \in \text{Ker } f$  si et seulement si  $P$  s'écrit  $a + 2aX + aX^2$ , ce qui donne  $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 + 2X + 1)$ .

- Déterminons  $\text{Im } f$  : si  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , on a  $Q \in \text{Im } f$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) \in \text{Im } A$ . Or

$$\text{Im } A = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que  $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X)$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(1)$   $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$

**3. Représentation et opérations**

Le résultat suivant justifie la correspondance entre les applications linéaires entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et les matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Théorème - Applications linéaires et matrices**

Si  $E, F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

où  $p = \dim E$  et  $n = \dim F$ , est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**Démonstration.**

- La linéarité de l'application  $y \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$  entraîne directement la linéarité de  $\Phi$  : pour tous  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$ .
- L'application  $\Phi$  est injective : si  $f \in \text{Ker } \Phi$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = 0_{n,p}$ , donc pour tout vecteur  $e \in \mathcal{B}$ , on a  $f(e) = 0_F$ , donc  $f$  est l'application nulle. On a donc  $\text{Ker } \Phi = \{0_{\mathcal{L}(E, F)}\}$ .
- Comme par ailleurs,  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F = np = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\Phi$  est un isomorphisme.  $\square$

**Théorème - Matrice d'une composée**

Soient  $E, F, G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie ayant pour bases respectives  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

**Démonstration.** On note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g)$ . Si  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la  $j$ -ème colonne de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)$  est

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(g(f(e_j))) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_j)) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_j) = AB e_j.$$

En d'autres termes, la  $j$ -ème colonne de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)$  est la  $j$ -ème colonne de  $AB$ , donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = AB$ .  $\square$

### Corollaire

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. En particulier, si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$ .

**Exemple.** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , où  $E$  est de dimension finie et a pour base  $\mathcal{B}$ , alors

- ◊  $f$  est un projecteur si et seulement si  $A^2 = A$ ,
- ◊  $f$  est une symétrie si et seulement si  $A^2 = I_n$ .

### Théorème - Bijectivité et matrice d'une réciproque

Soient  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie tels que  $\dim E = \dim F = n$ , ayant pour bases respectives  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$f \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas,  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}$ .

**Démonstration.**

- Si  $f$  est un isomorphisme,  $I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ , et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = I_n$ . Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est inversible, d'inverse  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1})$ .
- Réciproquement, supposons que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est inversible, d'inverse  $B$ . On sait qu'il existe  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = B$ . On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = I_n.$$

Ainsi,  $g \circ f = \text{Id}_E$ , donc  $f$  est isomorphisme, et  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = B = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $f$  est un automorphisme si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible.

## 4. Rang d'une matrice

### Définition - Rang d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On appelle *rang* de  $A$ , noté  $\text{rg}(A)$ , la dimension de  $\text{Im } A$ , c'est-à-dire le rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes :

$$\text{rg } A = \dim \text{Im } A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p),$$

où  $C_1, \dots, C_p$  sont les colonnes de  $A$ . Autrement dit  $\text{rg } A = \text{rg } \varphi_A$ , où  $\varphi_A$  est l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Remarque.** Comme  $\text{rg } A = \text{rg } \varphi_A$ , on sait que

$$\text{rg } A \leq \min(p, n).$$

En d'autres termes, le rang d'une matrice ne peut excéder le nombre de ses lignes, ni le nombre de ses colonnes.

**Exemples.**

1.  $\text{rg}(I_n) = n$ , et  $\text{rg}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$ .
2.  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 2$ .

**Théorème - Rang d'une application linéaire, rang de matrice**

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)) = \text{rg } f.$$

**Démonstration.** Si on note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ , on a  $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_p)))$ . Comme  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $\mathbb{K}^n$ , on en déduit que  $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \text{rg } f$ .  $\square$

**Remarques.**

- On retiendra que le rang de  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est le rang de sa matrice relativement à n'importe quel couple de bases.
- On a aussi, pour toute famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E$  :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)).$$

Par conséquent le rang d'une application linéaire ou d'une famille de vecteur peut se ramener au calcul du rang d'une matrice.

**Exemple.** Si  $P = X^2 - X + 1$ ,  $Q = 3X^2 + X + 2$  et  $R = 3X^2 + 5X + 1$ , alors  $\text{rg}(P, Q, R) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

Comme  $\text{rg } A = \text{rg } \varphi_A$ ,  $\text{Ker } A = \text{Ker } \varphi_A$  et  $\text{Im } A = \text{Im } \varphi_A$ , les résultats rencontrés précédemment pour les applications linéaires se transcrivent directement matriciellement.

**Théorème**

i. *Théorème du rang* : si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , alors  $p = \dim \ker A + \text{rg } A$ .

ii. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0_{n,1}\} \Leftrightarrow \text{Im } A = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \text{rg } A = n.$$

iii. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$ .

**II Changement de base, équivalence, similitude**

Dans toute cette partie,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  dont deux bases de  $E$ .

**1. Matrices de passage**

Nous allons introduire des matrices permettant, au moyen d'un produit matriciel, de passer des coordonnées d'un vecteur dans une base aux coordonnées de ce même vecteur dans une autre base.

**Définition - Matrice de passage**

On appelle matrice de passage entre la base  $\mathcal{B}$  et la base  $\mathcal{B}'$  la matrice

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

Il s'agit de la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{matrix} & e'_1 & \dots & e'_n \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Théorème - Propriétés des matrices de passage**

Si  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  sont trois bases de  $E$ , alors

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{ est inversible, et } (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}, \quad P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}.$$

**Démonstration.**

- Comme  $\text{Id}_E$  est un isomorphisme, sa matrice  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$  est inversible. Par ailleurs, on sait que  $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_E^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_E) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ .
- On a  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E \circ \text{Id}_E) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$ .  $\square$

**Exemple.** On se place dans  $\mathbb{R}^2$ , muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  et de la base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  avec  $e'_1 = (1, 1)$  et  $e'_2 = (0, 1)$ . On a

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{matrix} & e'_1 & e'_2 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**Théorème - Vecteurs et changement de base**

Si  $x \in E$  et si on note  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ , on a :  $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$ .

**Démonstration.** On a  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ .  $\square$

**Exemple.** Revenons à l'exemple ci-dessus : si  $x = (2, 2)$ , alors on a  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On trouve les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  en écrivant :

$$X' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Théorème - Applications linéaires et changement de base**

Soient  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors en notant :  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ ,  $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ ,  $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ,  $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ , on a :

$$A' = Q^{-1} A P.$$

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que  $\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E)$ .  $\square$

**Théorème - Matrices  $J_r$** 

Soient  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie avec  $\dim E = p$  et  $\dim F = n$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\text{rg } f = r$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$  telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_r, \quad \text{où } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

**Remarque.** La matrice  $J_r$  dans le théorème ci-dessus est donnée “pas blocs” : le bloc supérieur gauche est la matrice carrée  $I_r$ , les autres blocs sont des matrices nulles, respectivement de  $\mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{n-r,p-r}(\mathbb{K})$ .

**Démonstration.** On remarque pour commencer que le théorème du rang entraîne que  $\dim \text{Ker } f = p - r$ .

On considère une base de  $\text{Ker } f$ , qu'on note  $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ . On peut ensuite compléter cette famille en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$  de  $E$ .

La famille  $(f(e_1), \dots, f(e_r))$  est libre : en effet si  $\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_r f(e_r) = 0_F$ , alors par linéarité  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \in \text{Ker } f \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = \{0_E\}$ , donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ . On donc compléter cette famille libre de  $F$  en une base  $\mathcal{C} = (f(e_1), \dots, f(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$  de  $F$ .

$$\begin{matrix} & f(e_1) & \dots & f(e_r) & f(e_{r+1}) & \dots & f(e_p) \\ \begin{matrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_r) \\ \varepsilon_{r+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  est donc bien la matrice  $J_r$  souhaitée.  $\square$

**Remarques.** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ .

- Il y a une matrice  $J_r$  pour chaque taille  $n \times p$  de matrice. Lorsqu'on aura besoin de le préciser, on notera  $J_r^{n,p}$  la matrice  $J_r$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
- La matrice  $J_r$  est de rang  $r$ .

## 2. Matrices équivalentes

La définition qui suit se base sur la formule de changement de base pour les applications linéaires : comme nous allons le voir, on dira de deux matrices qu'elles sont équivalentes si elles représentent la même application linéaire.

### Définition – Matrices équivalentes

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que

$$B = Q^{-1}AP.$$

### Remarques.

- Comme on sait qu'effectuer une opération élémentaire sur une matrice revient à la multiplier par une matrice inversible, on en déduit que si  $B$  est obtenue depuis  $A$  par opérations élémentaires, alors  $A$  et  $B$  sont équivalentes.

**Démonstration.** Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) de  $A$  revient à la multiplier par une certaine matrice inversible à gauche (resp. à droite). Ainsi, si  $B$  est obtenue depuis  $A$  au moyen d'opérations élémentaires, alors  $B$  s'écrit  $B = QAP$ , avec  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ .  $\square$

- L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  (exercice).

### Théorème – Équivalence et applications linéaires

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux couples de bases.

**Remarque.** En particulier, les matrices représentant une même application linéaire relativement à tout couple de bases sont équivalentes.

**Démonstration.** Si  $A$  et  $B$  sont équivalentes, on peut écrire  $B = Q^{-1}AP$  avec  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi_A)$  où  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$ . On introduit alors les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  de  $E$  et  $F$  telles que  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P$  et  $P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = Q$ . Il suffit, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , de choisir  $e'_i$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_i) = C_i(P)$  et de poser  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ , c'est analogue pour  $\mathcal{C}'$ . Alors  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ . La réciproque provient du changement de base détaillé plus haut.  $\square$

### Théorème – Équivalence et rang

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

**Démonstration.** Si  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes, alors elles représentent la même application linéaire  $f$  dans deux couples de bases. Ceci entraîne que  $\text{rg } A = \text{rg } B = \text{rg } f$ .

Réciproquement, si  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $r = \text{rg } A = \text{rg } B$ , alors on a vu que  $A$  et  $B$  sont toutes deux équivalentes à la même matrice  $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , donc  $A$  et  $B$  sont équivalentes.  $\square$

### Théorème – Rang et transposition

Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , alors  $\text{rg } A = \text{rg } A^\top$ .

**Démonstration.** On note  $J_r^{n,p}$  la matrice  $J_r$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $J_r^{p,n}$  la matrice  $J_r$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Si on note  $r = \text{rg } A$ , on sait que  $A$  est équivalente à  $J_r^{n,p}$  : il existe alors  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = QJ_r^{n,p}P$ . Par conséquent,  $A^\top = P^\top J_r^{\top} Q^\top$ , et  $A^\top$  est du rang de  $J_r^\top = J_r^{p,n}$ , c'est-à-dire  $r$ .  $\square$

**Remarque.** On avait déjà vu que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes, on déduit de ce qui précède que c'est aussi le rang de la famille de ses lignes.



### Calcul du rang

Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes ne changent pas le rang de la matrice.

**Démonstration.** Effectuer ces opérations revient à multiplier la matrice  $A$  par une matrice inversible à gauche ou à droite, or si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ , on a  $\text{rg}(A) = \text{rg}(PA) = \text{rg}(AQ)$ .  $\square$

Les opérations élémentaires permettent au moyen de l'algorithme du pivot de Gauss de se ramener sans changer le rang à une matrice échelonnée, dont le rang est égal au nombre de ses lignes non nulles.

**Exemple.**  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 2.$

### 3. Similitude

Le définition qui suit se base sur la formule de changement de base pour les applications linéaires : comme nous allons le voir, on dira de deux matrices carrées de même taille qu'elles sont semblables si elles représentent le même endomorphisme *avec la même base au départ et à l'arrivée*.

#### Définition - Matrices semblables

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est semblable à  $B$  s'il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

#### Remarques.

- La relation de similitude est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Deux matrices semblables sont en particulier équivalentes, elles ont donc même rang.

#### Théorème - Similitudes et applications linéaires

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.

**Remarque.** On prendra garde au fait que la base d'arrivée de l'endomorphisme doit être *la même au départ et à l'arrivée* : deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement s'il existe un espace vectoriel  $E$  qui a pour bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tels que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

**Démonstration.** La preuve est la même que celle plus haut pour caractériser les matrices équivalentes. □

On rappelle la définition de la trace d'une matrice, déjà rencontrée, ainsi que ses propriétés.

#### Définition - Trace d'une matrice

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle *trace* de  $A$ , notée  $\text{tr } A$  la somme de ses coefficients diagonaux :  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

#### Théorème - Propriétés de la trace

i. L'application  $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire : si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B, \quad \text{et} \quad \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A.$$

ii. Si  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ,  $\text{tr}(A^\top) = \text{tr } A$ .

iii. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Démonstration.** Les points i. et ii. se voient aisément. Montrons le dernier :

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n (BA)_{j,j} = \text{tr}(BA). \quad \square$$

#### Théorème - Similitude et trace

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables, alors  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

**Démonstration.** Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables, il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $B = P^{-1}AP$ . On en déduit que  $\text{tr } B = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr } A$ .  $\square$

### Définition - Trace d'un endomorphisme

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors  $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie. On appelle alors trace de  $f$ , et on note  $\text{tr}(f)$  le scalaire  $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ .

**Exemple.** Si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur de  $E$ , alors  $\text{tr } p = \text{rg } p$ .

En effet, si on considère une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ , alors la matrice de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\begin{array}{c} p(e_1) \quad \dots \quad p(e_r) \quad p(e_{r+1}) \quad \dots \quad p(e_n) \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

qui est de trace  $r = \text{rg } p$ , ce qui conclut.

## 4. Rang et matrices extraites

### Définition - Matrice extraite

Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on dit que  $B$  est une matrice extraite de  $A$  si  $B$  est une matrice qui s'écrit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ , où  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ .

**Remarque.** En d'autres termes,  $B$  est extraite de  $A$  si on obtient  $B$  en retirant à  $A$  certaines lignes et certaines colonnes.

**Exemple.** La matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$  est extraite de  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

### Théorème - Rang et matrices extraites

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ . Alors,

- toutes les matrices extraites de  $A$  sont de rang au plus  $r$ ,
- si  $r \in \mathbb{N}^*$ , il existe une matrice  $B \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$  extraite de  $A$ .

**Démonstration.**

- Comme  $A$  est de rang  $r$ , toute famille de  $r + 1$  colonnes de  $A$  est liée. Il est clair que cette même relation de liaison lie les colonnes auxquelles on a retiré certaines lignes. On en déduit donc qu'une matrice extraite ne peut avoir  $r + 1$  colonnes linéairement indépendantes, et est donc de rang au plus  $r$ .
- On sait que  $A$  possède  $r$  colonnes qui forment une famille libre. La matrice extraite obtenue en ne conservant que ces colonnes est donc de rang  $r$ . À son tour, cette matrice possède  $r$  lignes formant une famille libre. La matrice  $B$  extraite en ne conservant que ces lignes est de rang  $r$ . Comme  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ , elle est donc inversible.  $\square$

## 5. Diagonalisabilité

### Définition - Matrices diagonalisables, endomorphismes diagonalisables

- On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.
- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, on dit qu'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale.

**Remarque.** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie de base  $\mathcal{B}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est une matrice diagonalisable.

**Définition - Vecteurs propres, valeurs propres**

Soient  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- On dit qu'un vecteur  $x \in E$  non nul est un vecteur propre de  $f$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x) = \lambda x$ .
- S'il existe un tel vecteur, on dit que le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ .

**Remarque.** Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f$ , alors les vecteurs non nuls de  $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E, f(x) = \lambda x\}$  sont les vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda$ .

**Théorème - Diagonalisabilité et vecteurs propres**

Soit  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

**Démonstration.** Si  $f$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale, on la note alors  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Ceci entraîne que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ . Comme les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de  $f$ .

S'il existe une base  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs propres, on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les scalaires tels que  $f(e_i) = \lambda_i e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et on a alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , donc  $f$  est diagonalisable.  $\square$

**Exercice 1.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que toute famille de vecteurs propres de  $f$  associés à des valeurs propres distinctes est libre.
2. En déduire que si  $f$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable.