

Chapitre 22

Intégration

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Uniforme continuité

Définition - Uniforme continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarques.

1. Il convient de bien noter la différence avec la continuité sur I : une fonction continue en tout point de I vérifie :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_x > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on a toujours l'existence du réel η , mais ce réel varie en fonction des réels $x \in I$. Dans le cas de l'uniforme continuité, on peut choisir un réel η qui convient *pour tous les réels* $x \in I$.

Si f est uniformément continue sur I , elle est bien sûr continue sur I , mais la réciproque est fausse.

2. Si f est k -lipschitzienne sur I , alors elle est uniformément continue sur I .

En effet, si $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors, pour tous $x, y \in I$ tels que $|x - y| < \eta$, le caractère k -lipschitzien de f donne $|f(x) - f(y)| \leq k|y - x| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

Théorème - Théorème de Heine

Si f est une fonction continue sur un segment I , alors f est uniformément continue.

Démonstration. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur I , c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x, y \in I, |x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in I$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Ceci construit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui sont bornées car I est un segment. Le théorème de Bolzano-Weierstrass entraîne alors l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans I , dont on note x la limite. On en déduit que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$: on a donc

$$|y_{\varphi(n)} - x| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x| < \frac{1}{n} + |x_{\varphi(n)} - x| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La continuité de f donne alors que $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui contredit (1). $\square$

II Intégrale de Riemann

Dans toute cette partie, I est un segment, qu'on écrira $I = [a, b]$ avec $a \leq b$.

1. Intégration des fonctions en escalier

Définition - Subdivision

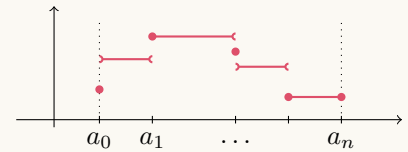
On appelle *subdivision* de I la donnée de $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, où $a_0, \dots, a_n \in I$, et $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. On appelle *pas* de la subdivision σ le réel $h = \max\{a_{k+1} - a_k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Remarque. On convient ici de toujours écrire les subdivisions sous la forme $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ en respectant l'ordre des réels $a_0, \dots, a_n$: on a toujours $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.

Définition – Fonction en escalier

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *en escalier* sur I s'il existe une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à f .

On note $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I .



Remarques.

1. On appelle aussi fonctions constantes par morceaux les fonctions en escalier.
2. De manière équivalente, une fonction en escalier est une fonction de la forme

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{I_k},$$

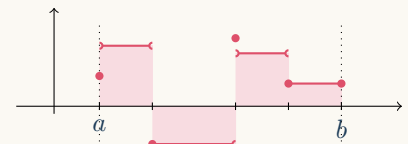
où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $I_1, \dots, I_n$ sont des sous-intervalles de I .

3. Les fonctions de $\mathcal{E}(I)$ prennent un nombre fini de valeurs sur I , et sont donc bornées sur I .
4. Si $f, g \in \mathcal{E}(I)$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g : si σ_f et σ_g sont des subdivisions adaptées respectivement à f et g , il suffit de considérer $\sigma_f \cup \sigma_g$.
5. L'ensemble $\mathcal{E}(I)$ contient la fonction nulle, et est clairement stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Définition-théorème – Intégration d'une fonction en escalier

Si $f \in \mathcal{E}(I)$ de subdivision adaptée $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f vaut y_k sur $]a_k, a_{k+1}[$, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} y_k (a_{k+1} - a_k).$$



Le réel ainsi défini ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie. On le note $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$.

Démonstration. On note I_σ l'intégrale de f pour une subdivision adaptée σ de f . Il suffit de se persuader que si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées à f , alors $\sigma \cup \sigma'$ est encore une subdivision adaptée à f , et $I_\sigma = I_{\sigma \cup \sigma'} = I_{\sigma'}$. $\square$

Théorème – Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

- Linéarité de l'intégrale.* Si $f, g \in \mathcal{E}(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- Positivité de l'intégrale.* Si $f \in \mathcal{E}(I)$ et $f \geq 0$ sur I , $\int_a^b f \geq 0$.
- Croissance de l'intégrale.* Si $f, g \in \mathcal{E}(I)$ et $f \leq g$ sur I , $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Inégalité triangulaire.* Si $f \in \mathcal{E}(I)$, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.
- Relation de Chasles.* Si $f \in \mathcal{E}(I)$ et $c \in [a, b]$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration.

- Si $f, g \in \mathcal{E}(I)$, on considère une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ adaptée à f et g . Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_k et z_k les valeurs respectives de f et g sur $]a_k, a_{k+1}[$, et on remarque que $\lambda f + \mu g$ vaut $\lambda y_k + \mu z_k$ sur $]a_k, a_{k+1}[$.

Ainsi, σ est adaptée à $\lambda f + \mu g$, et on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda y_k + \mu z_k)(a_{k+1} - a_k) = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

ii. Avec les mêmes notations, on a $y_k \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, donc $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(a_{k+1} - a_k) \geq 0$.

iii. Si $f \leq g$, on a $g - f \geq 0$ sur I , et $g - f \in \mathcal{E}(I)$, donc $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$ par positivité de l'intégrale, puis $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ par linéarité.

iv. On garde les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} y_k(a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |y_k|(a_{k+1} - a_k) = \int_a^b |f|,$$

par inégalité triangulaire pour la somme. En effet, la fonction $|f| \in \mathcal{E}(I)$ a pour valeur $|y_k|$ sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

v. On garde les mêmes notations. Si $c \in \sigma$, le résultat est clair, sinon, on a $a_0 < \dots < a_m < c < a_{m+1} < \dots < a_n$ pour un entier m . Il est alors clair que f est en escalier sur $[a, c]$ et $[b, c]$, de subdivisions adaptées $\{a_0, \dots, a_m, c\}$ et $\{c, a_{m+1}, \dots, a_n\}$. Comme $\{a_0, \dots, a_m, c, a_{m+1}, \dots, a_n\}$ est une subdivision adaptée à f , on a

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^m y_k(a_{k+1} - a_k) + y_m(c - a_m) + y_{m+1}(a_{m+1} - c) + \sum_{k=m+1}^n y_k(a_{k+1} - a_k) = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \square$$

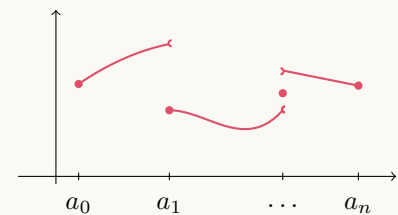
2. Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition - Fonctions continues par morceaux sur un segment

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de I telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$.

On note $\mathcal{C}_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment I .



Remarques.

- L'ensemble $\mathcal{C}_m(I)$ est stable par combinaison linéaire et par produit, donc $\mathcal{C}_m(I)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (on dit que $\mathcal{C}_m(I)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).
- Les fonctions continues sur I , les fonctions en escalier sur I sont clairement continues par morceaux sur I .
- Toute fonction de $\mathcal{C}_m(I)$ est bornée sur I : comme $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, le théorème des bornes atteintes entraîne que f est bornée sur chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$, donc sur I .

Théorème - Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

Soient $f \in \mathcal{C}_m(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(I)$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$ sur I .

Démonstration. Commençons par traiter le cas où f est continue sur I . Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur I , donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On considère ensuite une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de I de pas $h < \eta$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, comme la fonction f est prolongeable en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, elle atteint ses bornes sur ce segment, notées m_k et M_k :

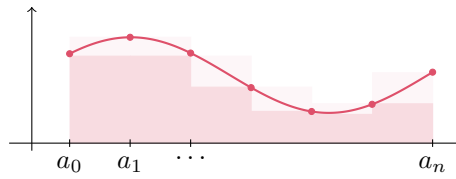
$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}], \quad m_k \leq f(x) \leq M_k, \quad \text{et} \quad M_k - m_k < \varepsilon$$

car il existe $x_k, y_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tels que $m_k = f(x_k)$ et $M_k = f(y_k)$, et ainsi $|x_k - y_k| \leq \eta$. On pose alors

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \mathbb{1}_{I_k}, \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \mathbb{1}_{I_k},$$

où $I_k = [a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n]$. On a alors $\varphi \leq f \leq \psi$ par construction, et comme les valeurs de $\psi - \varphi$ sont exactement les réels $M_k - m_k$, on a $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Le cas où f est continue par morceaux se traite de la même manière, en traitant chaque sous-intervalle où f est continue comme ci-dessus. $\square$



Théorème et définition - Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$. On a :

$$\sup \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}(I), \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}(I), \psi \geq f \right\}.$$

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ le réel ci-dessus, et on le note $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$.

Démonstration. On sait que f est bornée : il existe m, M tels que $m \leq f \leq M$ sur I . Ainsi, les fonctions constantes φ_0, ψ_0 égales respectivement à m et M sont en escalier, et vérifient $\varphi_0 \leq f \leq \psi_0$. Par ailleurs,

- si $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ et $\varphi \leq f$, alors $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b M = M(b-a)$.
- si $\psi \in \mathcal{E}(I)$ et $\psi \leq f$, alors $\int_a^b \psi \geq \int_a^b m = m(b-a)$.

Ainsi, les ensembles de l'énoncé sont non vides, et respectivement majoré et minoré, ce qui garantit l'existence des réels de l'énoncé, qu'on note respectivement I_- et I_+ .

Il reste à montrer que $I_- = I_+$. On remarque d'abord que $I_- \leq I_+$: si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(I)$ avec $\varphi \leq f \leq \psi$, alors

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi, \text{ donc } I_- \leq \int_a^b \psi, \text{ puis } I_- \leq I_+,$$

en passant à la borne supérieure, puis à la borne inférieure. On fixe ensuite $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(I)$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \frac{1}{n}$. On a alors

$$\int_a^b \varphi \leq I_- \leq I_+ \leq \int_a^b \psi, \text{ donc } I_+ - I_- \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \frac{1}{n}(b-a).$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_+ - I_- \leq \frac{1}{n}(b-a)$. En laissant tendre n vers $+\infty$, on obtient $I_- = I_+$ par encadrement. $\square$

Remarque. *Écriture séquentielle* : si $f \in \mathcal{C}_m(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{E}(I)$ telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et $\psi_n - \varphi_n \leq \frac{1}{n}$ sur I . On a alors

$$0 \leq \int_a^b f - \int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n = \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \leq \frac{1}{n}(b-a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \int_a^b \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

Les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier restent vraies pour les fonctions continues par morceaux.

Théorème - Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

- (i). *Linéarité de l'intégrale.* Si $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- (ii). *Positivité de l'intégrale.* Si $f \in \mathcal{C}_m(I)$ et $f \geq 0$ sur I , $\int_a^b f \geq 0$.
- (iii). *Croissance de l'intégrale.* Si $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$ et $f \leq g$ sur I , $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

- (iv). *Inégalité triangulaire.* Si $f \in \mathcal{C}_m(I)$, alors $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.
- (v). *Relation de Chasles.* Si $f \in \mathcal{C}_m(I)$ et $c \in [a, b]$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- (vi). *Positivité stricte.* Si f est continue et positive sur I et $f(x_0) > 0$ où $x_0 \in I$, alors $\int_a^b f > 0$.

Démonstration. On peut déduire les résultats (i). à (v). des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier en utilisant le résultat d'approximation.

Montrons seulement l'additivité, (i). à (v). se démontrent de manière similaire : si $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n, \tilde{\varphi}_n, \psi_n, \tilde{\psi}_n \in \mathcal{E}(I)$ telle que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, $\tilde{\varphi}_n \leq g \leq \tilde{\psi}_n$, et $\psi_n - \varphi_n \leq \frac{1}{2n}$, $\tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n \leq \frac{1}{2n}$ sur I .

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_n + \tilde{\varphi}_n \leq f + g \leq \psi_n + \tilde{\psi}_n$ et $(\psi_n + \tilde{\psi}_n) - (\varphi_n + \tilde{\varphi}_n) \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent,

$$\int_a^b (\varphi_n + \tilde{\varphi}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f + g), \text{ mais aussi } \int_a^b (\varphi_n + \tilde{\varphi}_n) = \int_a^b \varphi_n + \int_a^b \tilde{\varphi}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f + \int_a^b g.$$

On en déduit par unicité de la limite que $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Montrons maintenant (vi). : si $f(x_0) > 0$, alors par continuité de f en x_0 , il existe un voisinage de x_0 dans I sur lequel $f \geq \frac{f(x_0)}{2}$. Il existe alors un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de I contenant x_0 tel que $\alpha < \beta$ et $f \geq \frac{f(x_0)}{2}$ sur $[\alpha, \beta]$. Ainsi,

$$f \geq \frac{f(x_0)}{2} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]} \text{ donc } \int_a^b f \geq \int_a^b \frac{f(x_0)}{2} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]} = \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \quad \square$$

Remarque. La contraposée du point (vi). est souvent très utile, elle peut être formulée de la manière suivante, en remarquant que si f est négative, alors $-f$ est positive.

Si f est continue, de signe constant sur I et $\int_a^b f = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .

Notation.

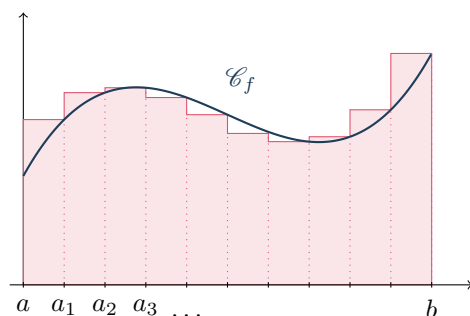
Toujours lorsque $a \leq b$, on convient de noter $\int_b^a f = - \int_a^b f$.

Remarque. ⚠ On doit toujours avoir $a \leq b$ pour que l'inégalité triangulaire $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ soit valable.

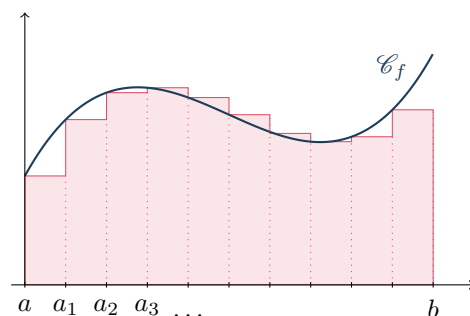
3. Sommes de Riemann

Le résultat qui suit porte parfois le nom de *méthode des rectangles* car il consiste à approcher l'intégrale d'une fonction sur un segment par la somme des aires de rectangles, qu'on sait calculer aisément.

L'idée est d'approcher f par une constante sur chaque sous-intervalle obtenu à partir d'une subdivision régulière de $[a, b]$. On obtient alors une fonction en escalier, dont on sait facilement calculer l'intégrale.



Méthode des rectangles “à droite”



Méthode des rectangles “à gauche”

On se donne une subdivision obtenue en découpant l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de taille $\frac{b-a}{n}$: il s'agit de la subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, où $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, de sorte que $a_0 = a$ et $a_n = b$.

- La méthode des rectangle “à gauche” consiste à approcher f par $f(a_k)$ sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}[$.
- La méthode des rectangle “à droite” consiste à approcher f par $f(a_{k+1})$ sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}]$.

On obtient donc les deux sommes suivantes, qui ne sont autres que les intégrales des fonctions en escalier décrites ci-dessus :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (\text{rectangles "à droite"}), \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (\text{rectangles "à gauche"}).$$

Ces sommes sont connues sous le nom de *sommes de Riemann* de f . Elles convergent toutes deux vers l'intégrale de f lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème - Sommes de Riemann

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Cas particulier $a = 0, b = 1$: si $f \in \mathcal{C}_m([0, 1])$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

Remarque. Il est important de reconnaître rapidement une somme de Riemann (le plus souvent dans le cas particulier $a = 0, b = 1$ ci-dessus). Le calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ se ramène alors à un calcul d'intégral.

Démonstration. Nous nous contentons de démontrer le résultat dans le cas où f est K -lipschitzienne sur $[a, b]$, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in [a, b]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. On note $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout k .

On remarque que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dx = f(a_k)(a_{k+1} - a_k) = \frac{b-a}{n} f(a_k)$. Ainsi,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(a_k)) dx \right|.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} K(x - a_k) dx \\ &= K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} = K \frac{(b-a)^2}{2n}, \end{aligned}$$

car $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$. On en déduit que $\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui conclut. Le cas de (S'_n) est similaire. $\square$

Remarque. Le cas général se démontre à l'aide de l'uniforme continuité et est une adaptation assez directe de la démarche suivie pour montrer le théorème d'approximation par des fonctions en escalier.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ étant continue sur $[0, 1]$, le théorème des sommes de Riemann donne :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

III Intégration et dérivation

Dans cette partie, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1. Primitives

Définition-théorème - Primitives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I , de dérivée f .

Si f possède une primitive F sur I , alors ses primitives sur I sont exactement les fonctions de la forme $F + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Si G est une primitive de f , alors on a $F' = G' = f$ sur l'intervalle I . Par conséquent, on a $(G - F)' = G' - F' = 0$ sur I . Ceci entraîne que la fonction $G - F$ est constante sur I : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + \lambda$. Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(F + \lambda)' = f$ sur I , donc $F + \lambda$ est une primitive de f sur I . $\square$

Primitives usuelles. Il est primordial de bien connaître les primitives usuelles ci-dessous.

Fonction : $x \mapsto$	Primitive : $x \mapsto$	Domaine de validité
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	– si $\alpha \in \mathbb{N}$: $\mathbb{R}$, – si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$: $\mathbb{R}^*$, – sinon : $\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+a^2}, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$

Par ailleurs, il est souvent très utile de reconnaître les formes de dérivées usuelles pour déterminer une primitive d'une fonction dans certains cas. À ce titre, on rappelle les cas suivants, qu'il convient de bien connaître, où u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$u'u^n, \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$\{x \in I, u(x) \neq 0\}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\{x \in I, u(x) > 0\}$

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$u' u^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\{x \in I, u(x) > 0\}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$\{x \in I, u(x) \neq 0\}$
$u' e^u$	e^u	I

Plus généralement, il est important de reconnaître lorsqu'une fonction est de la forme $f : x \mapsto u'(x)\varphi'(u(x))$, où φ est une fonction dérivable. Dans ce cas, la fonction $F : x \mapsto \varphi(u(x))$ est une primitive de f .

Exemples.

1. *Primitive de tan sur son domaine.* Comme $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{-\sin}{\cos}$, la fonction $\tan$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u = \cos$. Une primitive de $\tan$ est donnée par

$$F : x \mapsto -\ln(|\cos x|).$$

2. *Primitive de $f = \cos \sin^2$.* La fonction $\cos \sin^2$ est de la forme $u' u^2$, qui a pour primitive $\frac{u^3}{3}$, donc une primitive de f est donnée par

$$F : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{3}.$$

3. *Primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{x \ln x} dx$.* Comme $\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, la fonction g est de la forme $\frac{u'}{u}$. Ainsi, une primitive de g est donnée par

$$G : x \mapsto \ln(|\ln x|).$$

Quelques fonctions à savoir intégrer

- **Fonctions de la forme** $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ **ou** $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Si $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, on pense à intégrer la fonction complexe $h : x \mapsto e^{(a+ib)x}$, qui admet pour primitive $H : x \mapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$. On a alors $f = \Re(h)$. Comme $\Re(h') = \Re(H)'$,

$$F : x \mapsto \Re \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \Re(e^{ibx}(a-ib)) = \frac{e^{ax}(a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2+b^2}$$

est une primitive de f . Le cas est similaire pour $g : x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ en prenant la partie imaginaire.

Exemple. Déterminons une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^x \sin(2x)$.

Une primitive de la fonction à valeurs complexes $h : x \mapsto e^x e^{2ix}$ est $H : x \mapsto \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \frac{e^x (\cos(2x) + i \sin(2x))(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = e^x \frac{(\cos(2x) + i \sin(2x))(1-2i)}{5}.$$

Comme $f = \Im h$, une primitive de f est donnée par $\Im H : x \mapsto \frac{1}{5} e^x (\sin(2x) - 2 \cos(2x))$.

- **Fonctions de la forme** $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$.

◊ Si $aX^2 + bX + c$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire si le discriminant est négatif, on fait apparaître la dérivée de la fonction arctan à l'aide de la forme canonique au dénominateur et on intègre.

Exemple. Si $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$, donc

$$F : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad \text{est une primitive de } f.$$

◊ Sinon, on factorise $aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{R}[X]$, et on effectue une décomposition en éléments simples avant d'intégrer.

2. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème - Théorème fondamental de l'analyse

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est une primitive de f sur I .

Démonstration. Soit $x \in I$, montrons que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$. Pour tout h tel que $x + h \in I$, on a

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt$$

par la relation de Chasles. Alors, si de plus $h > 0$, comme $f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, dt$,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. On sait par continuité de f en x qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|t - x| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Ainsi, si $h < \eta$, alors pour tout $t \in [x, x+h]$, on a $|t - x| \leq h < \eta$, donc

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon \, dt = \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue lorsque $-\eta < h < 0$ montre le même résultat. Finalement, on a pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$|h| < \eta \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{donc} \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

donc $F'(x) = f(x)$. □

Remarque. Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, les primitives de f sont donc toutes les fonctions de la forme

$$x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt + \lambda,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. On notera parfois $\int_a^x f(t) \, dt$ une primitive générique de f .

Corollaire

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur I , alors $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration. Si F est une primitive de f , on sait par le théorème précédent que F est de la forme

$$F : x \mapsto \int_a^b f(x) \, dx + \lambda$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda - \int_a^a f(x) \, dx - \lambda = \int_a^b f(x) \, dx$. □

Remarque. On peut aussi formuler le résultat de la manière suivante : si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors $\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$.

3. Intégration par parties

La technique de l'intégration par parties permet parfois de simplifier le calcul d'une intégrale dont l'intégrande (la fonction à intégrer) est sous la forme d'un produit.

Théorème - Intégration par parties

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$ et $a, b \in I$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Démonstration. Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , la fonction $uv' - u'v$ est continue sur I , et a pour primitive la fonction uv . Ainsi,

$$\int_a^b (uv' - u'v) = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a alors $\int_a^b uv' - \int_a^b u'v = [u(x)v(x)]_a^b$, ce qui conclut. $\square$

Remarque. Ce procédé est très utile pour certains calculs d'intégrales. Dans la pratique, on commencera par se demander si l'intégrale $\int_a^b u'v$ est plus simple à calculer que $\int_a^b uv'$ au préalable.

Exemple. Calcul de $\int_0^\pi t \cos t \, dt$.

On choisit naturellement de dériver la fonction $t \mapsto t$, et d'intégrer la fonction $t \mapsto \cos t$. En d'autres termes, on pose $u : t \mapsto \sin t$, et $v : t \mapsto t$, qui sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$. La formule d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \cos t \, dt &= [t \cdot \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin t \, dt = \pi \sin \pi - 0 \sin 0 - [-\cos t]_0^\pi \\ &= -(-\cos \pi - (-1)) = -2. \end{aligned}$$

Calcul de primitive par intégration par parties.

Il est courant d'utiliser ce procédé pour trouver une primitive d'une fonction écrite sous forme de produit. La formule se réécrit alors :

$$\int_a^x u(t)v'(t) \, dt = u(x)v(x) - \int_a^x u'(t)v(t) \, dt.$$

Exemple. Déterminons une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$. On a par intégration par parties :

$$\int^x \arctan t \, dt = \int^x 1 \times \arctan t \, dt = x \arctan x - \int^x t \frac{1}{1+t^2} \, dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \int^x \frac{2t}{1+t^2} \, dt$$

donc une primitive de arctan est donnée par $x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Remarque. La technique de l'exemple ci-dessus permet de trouver une primitive d'une fonction f dès qu'on connaît une primitive de la fonction $t \mapsto tf'(t)$.

4. Changement de variable

Dans cette partie, on a toujours $I = [a, b]$, et J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème - Changement de variable

Si $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(I) \subset J$, alors

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \, dy.$$

Démonstration. En notant F une primitive de f sur J , on remarque par une dérivation composée que $F \circ \varphi$ est une primitive de $x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Ainsi,

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(y)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F(y) \, dy. \quad \square$$

Dans la pratique. On peut chercher à utiliser directement la formule ci-dessus, en écrivant si besoin l'intégrale sous la bonne forme. Ce n'est toutefois pas toujours la solution la plus simple. On a alors recours à un changement de variable. On commence par écrire la nouvelle variable en fonction de l'ancienne : $y = \varphi(x)$.

Pour retrouver la formule, on part de l'égalité $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$, et on écrit " $dy = \varphi'(x) dx$ ", attention : c'est juste une notation. On obtient alors avec les nouvelles bornes :

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(x))}_u \underbrace{\varphi'(x) dx}_{du} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy.$$

$x=a \Leftrightarrow y=\varphi(a)$ $x=b \Leftrightarrow y=\varphi(b)$

⚠ On prendra garde à ne pas mélanger les variables ! Le changement de variable dans l'intégrale se fait d'une seule fois, en remplaçant toutes les apparitions de l'ancienne variable par une apparition de la nouvelle, et les anciennes bornes par les nouvelles.

Remarque. Le formule du changement de variable est utilisée aussi bien pour changer une intégrale de la forme $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ en une intégrale de la forme $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy$ que l'inverse.

Dans la pratique, ceci signifie que pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on pourra penser à des changements de variables de la forme $y = \varphi(x)$, ou bien $x = \psi(t)$.

Exemple. Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

On a recours au changement de variable $y = e^x$. On a alors $\frac{dy}{dx} = e^x$, donc " $dy = e^x dx$ ". Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x(e^x + 1)} e^x dx = \int_1^e \frac{1}{y(y+1)} dy = \int_1^e \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = [\ln y - \ln(y+1)]_1^e,$$

donc l'intégrale vaut $1 - \ln(1+e) + \ln 2$.

Remarque. On peut aussi utiliser la formule du changement de variable avec le changement de variable $x = \ln t$.

On voit l'intégrale comme $\int_{\psi(1)}^{\psi(e)} \frac{1}{e^x + 1} dx$, où $\psi : t \mapsto \ln t$, ce qui par la formule du changement de variable s'écrit :

$$\int_1^e \frac{1}{e^{\psi(t)} + 1} \psi'(t) dt = \int_1^e \frac{1}{t+1} \frac{1}{t} dt.$$

IV Formules de Taylor globales

Dans cette partie, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Nous avons déjà rencontré la formule de Taylor-Young, qui donne une information *locale* sur l'écart entre une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ et son développement de Taylor au voisinage du point choisi.

La formule ci-dessous permet de décrire explicitement et en tout point l'erreur commise en remplaçant f par son développement de Taylor en un point.

Théorème - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Pour tout x de I , on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Démonstration. Nous allons raisonner par récurrence sur n .

- *Initialisation.* Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors pour tout $x \in I$, on a $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$, c'est le théorème fondamental de l'analyse.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la formule est vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}$, et considérons $f \in \mathcal{C}^{n+2}$. Comme en particulier $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, l'hypothèse de récurrence donne que pour tout $x \in I$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[-f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

par intégration par parties. Ainsi,

$$f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} = f^{(n+1)}(a) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt,$$

ce qui donne bien que la formule est vraie pour f , et achève la récurrence. $\square$

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$, $a \in I$ et un réel M tel que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. On a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarques.

- L'existence de M est garanti par la continuité de $f^{(n+1)}$ sur le segment $[a, b]$, c'est le théorème des bornes atteintes.
- On note parfois $\|f^{(n+1)}\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$. La formule s'écrit alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t) (b-t)^n}{n!} dt \right| \leq \int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(t)| (b-t)^n}{n!} dt$$

par l'inégalité triangulaire. Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{M}{n!} \int_a^b (b-t)^n dt = \frac{M}{n!} \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \square$$

Une des applications primordiales de ce résultat est le développement en série de certaines fonctions usuelles.

Conséquence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. On note $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange sur le segment d'extrémités 0 et x . Pour tout $t \in I$, on a $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leq e^x$, donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{or} \quad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Par conséquent, $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par comparaison. $\square$

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ et $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.