

Chapitre 20

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dimension

1. Dimension finie

Définition - Espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice de cardinal fini. Dans le cas contraire, il est dit *de dimension infinie*.

Exemples.

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie car leurs bases canoniques respectives sont de cardinal fini.
2. La famille vide engendre $\{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est de dimension finie.
3. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

En effet, si $\mathbb{K}[X]$ est engendré par une famille finie $(P_1, \dots, P_n)$ rangée par degrés croissants. On note $d = \deg P_n$, et on remarque que $X^{d+1} \notin \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$, il y a contradiction.

Le théorème suivant fournit un nombre maximal de vecteurs pour une famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème - Lemme de Steinitz

Si E est un espace vectoriel de dimension finie possédant une famille génératrice de cardinal n , alors toute famille libre de E est au plus de cardinal n .

Démonstration. Considérons une famille génératrice $\mathcal{F}$, et supposons qu'il existe une famille libre $\mathcal{G}$ de cardinal $n+1$. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe une famille génératrice $(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$ avec $x_1, \dots, x_{n-k} \in \mathcal{F}$ et $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{G}$.

- Le résultat est vrai pour $k = 0$: il suffit de considérer la famille $\mathcal{F}$.
- Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe une famille génératrice $(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$ avec $x_1, \dots, x_{n-k} \in \mathcal{F}$ et $y_1, \dots, y_k \in \mathcal{G}$. Comme $k < n$, il existe un vecteur y_{k+1} de $\mathcal{G}$ distinct de $y_1, \dots, y_k$, qui s'écrit alors

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^k \mu_j y_j.$$

Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ sont non tous nuls (car sinon y_{k+1} est combinaison linéaire de $y_1, \dots, y_k$ et $\mathcal{G}$ est liée. Quitte à échanger les vecteurs, on peut supposer que $\lambda_{n-k} \neq 0$, donc $x_{n-k} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-k-1}, y_1, \dots, y_{k+1})$. Ainsi,

$$E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-k-1}, y_1, \dots, y_{k+1}),$$

et cette dernière famille est génératrice de E , ce qui achève la récurrence.

Par conséquent, en prenant $k = n$, on obtient l'existence d'une sous-famille $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathcal{G}$ qui est génératrice de E . Ainsi, le dernier vecteur y_{n+1} de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire de $y_1, \dots, y_n$, et $\mathcal{G}$ est liée, ce qui est contradictoire. $\square$

Théorème - Théorème de la base incomplète, de la base extraite

Si E un espace vectoriel de dimension finie,

- on peut compléter toute famille libre de E en une base de E ,
- on peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E .

Par conséquent, tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Rappel. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E et $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ est libre.

Démonstration. Soient $(x_1, \dots, x_m)$ une famille génératrice de E , et $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre de E . Nous allons procéder de manière algorithmique suivante pour compléter la famille libre en une base : on pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k)$, puis, tour à tour pour chacun des x_i ,

- si $x_i \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$, alors on ajoute le vecteur à $\mathcal{B}$, qui est alors encore libre,
- si $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{B})$, on ne modifie pas $\mathcal{B}$.

Lorsqu'on a terminé, on obtient une famille $\mathcal{B}$ qui est toujours libre, d'après ce qui précède. Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, soit x_i est un vecteur de $\mathcal{B}$, soit $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{B})$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E , c'est donc une base de E .

Pour extraire une base d'une famille génératrice $(x_1, \dots, x_m)$, on procède de la même manière, en partant de la famille vide et en considérant tour à tour les x_i comme ci-dessus. $\square$

2. Notion de dimension

Définition-théorème - Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes ses bases ont même cardinal. On appelle ce cardinal la *dimension* de E .

Démonstration. Si E possède deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on sait qu'elles sont finies, et on note n et n' leurs cardinaux respectifs. Comme $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{B}'$ est libre, le théorème ci-dessus entraîne que $n' \leq n$. En échangeant les rôles des deux bases, on obtient aussi que $n \leq n'$. Finalement, $n = n'$. $\square$

Exemples.

1. Les bases rencontrées précédemment permettent d'affirmer :

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np, \quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1.$$

2. **Matrices symétriques, antisymétriques.** On a :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration.

- Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, on a $A = \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la concaténation des familles

$$\mathcal{F}_1 = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}.$$

On voit aisément que $\mathcal{F}$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Par ailleurs, $|\mathcal{F}_1| = n$ et

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_2| &= |\{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i < j \leq n\}| = \left| \bigcup_{j=1}^n \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq j-1\} \right| \\ &= \sum_{j=1}^n |\{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq j-1\}|. \end{aligned}$$

Finalement, $|\mathcal{F}_2| = \sum_{j=1}^n j-1 = \sum_{j'=0}^{n-1} j' = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, on a $A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i}) \in \text{Vect}(\mathcal{F}_3)$, où $\mathcal{F}_3 = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$.

Ainsi, $\mathcal{F}_3$, libre et génératrice, est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, or $|\mathcal{F}_3| = |\mathcal{F}_2| = \frac{n(n-1)}{2}$. $\square$

3. **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.** Si $a, b \in \mathbb{K}$, alors

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

Démonstration. On remarque que $0_{\mathbb{K}^N} \in F$ et F est stable par combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^N$. Par ailleurs, les suites $v, w \in F$ définies par

$$\begin{cases} v_0 = 1, & v_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n, \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = 0, & w_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, & w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n. \end{cases}$$

La famille (v, w) est libre car aucune des deux suites n'est multiple de l'autre. D'autre part, si $u \in F$, alors les suites u et $u_0v + u_1w$ sont dans F et ont les mêmes deux premiers termes, elles sont donc égales. Ainsi, $u = u_0v + u_1w \in \text{Vect}(v, w)$, et on a $F = \text{Vect}(v, w)$.

Finalement, (v, w) est libre et génératrice de F , c'est donc une base de F , et $\dim F = 2$. $\square$

Théorème - Cardinal des familles libres, des familles génératrices

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , alors :

- Toute famille libre de E a au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.

Démonstration. On sait que E possède une base $\mathcal{B}$ de cardinal n . Comme $\mathcal{B}$ est génératrice, toute famille libre est de cardinal au plus n . Par ailleurs, comme $\mathcal{B}$ est libre de cardinal n , toute famille génératrice a au moins n vecteurs. $\square$

Remarque. En particulier, si E possède une famille génératrice de cardinal k , alors $\dim E \leq k$.

On en déduit que dans un espace vectoriel E de dimension n , il suffit de vérifier qu'une famille de cardinal n est libre, ou de vérifier qu'elle est génératrice pour en déduire qu'il s'agit d'une base de E . On dit souvent qu'une famille de cardinal $\dim E$ est *de bon cardinal*.

Théorème - Familles de bon cardinal

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille de E de cardinal n . Alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base.}$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est libre. Si $x \in E$, alors la famille $(u_1, \dots, u_n, x)$ n'est pas libre car elle est de cardinal $n + 1$, on en déduit donc que $x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice de E . Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, alors un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres, et on obtient une famille génératrice de cardinal $n - 1$, ce qui est impossible. $\square$

Exemple. Si $n \in \mathbb{N}$, une famille $(P_0, \dots, P_n)$ échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$ est une base : elle est libre et de bon cardinal.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat sur les suites linéaires d'ordre 2 rencontré au chapitre SUITES NUMÉRIQUES, que l'on montre ici dans le cas réel, le cas complexe étant similaire.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Si $a, b \in \mathbb{K}$, nous avons vu que $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2. On note Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = X^2 - aX - b$.

- Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines réelles distinctes de P , on note $v_n = r_1^n$ et $w_n = r_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a vu : $v, w \in F$. La famille (v, w) est une famille libre de bon cardinal de F , c'est une base de F . Ainsi

$$u \in F \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u = \lambda v + \mu w, \quad \text{i.e.} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$ et r_0 est l'unique racine réelle de P , on note $v_n = r_0^n$ et $w_n = nr_0^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a vu que $v, w \in F$. La famille (v, w) est une famille libre de bon cardinal de F , c'est une base de F . Ainsi,

$$u \in F \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u = \lambda v + \mu w, \quad \text{i.e.} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n.$$

- Si $\Delta < 0$ et $re^{i\theta}, re^{-i\theta}$ sont les racines complexes de P et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, alors la suite complexe z vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+2} = az_{n+1} + bz_n$.

Si on note $v_n = \Re(z_n) = r^n \cos(n\theta)$ et $w_n = \Im(z_n) = r^n \sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites v et w sont donc des suites de F . Ainsi, (v, w) est une famille libre de bon cardinal de F , donc base de F , et on a :

$$u \in F \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u = \lambda v + \mu w, \quad \text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

Théorème - Dimension d'un produit cartésien d'espaces vectoriels

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie, et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

Démonstration. On se donne une base $\mathcal{B}_E = (u_1, \dots, u_n)$ de E et une base $\mathcal{B}_F = (v_1, \dots, v_m)$ de F . On note $\mathcal{B}$ la famille formée par les couples $(u_i, 0_F)$ et les couples $(0_E, v_j)$, où $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$.

- On voit que $\mathcal{B}$ est génératrice en remarquant que si $(x, y) \in E \times F$ et si $(x_1, \dots, x_n)$ et $y_1, \dots, y_m$ sont les coordonnées respectives de x et y dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, alors

$$(u, v) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^m y_j v_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (u_i, 0_F) + \sum_{j=1}^m y_j (0_E, v_j) \in \text{Vect}(\mathcal{B}).$$

- Si $\lambda_1(u_1, 0_F) + \dots + \lambda_n(u_n, 0_F) + \mu_1(0_E, v_1) + \dots + \mu_m(0_E, v_m) = (0_E, 0_F)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m) = (0_E, 0_F)$, donc $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$ et $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = 0_F$, ce qui entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ par liberté des familles $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$, donc $\dim E \times F = |\mathcal{B}| = n + m = \dim E + \dim F$. $\square$

3. Rang d'une famille de vecteurs

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle *rang* de la famille $\mathcal{F}$, noté $\text{rg } \mathcal{F}$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)).$$

Remarque. Le rang de $\mathcal{F}$ correspond au cardinal de la plus grande sous-famille libre contenue dans $\mathcal{F}$.

Exemple. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a $\text{rg}(1, X, X^2) = \dim \text{Vect}(1, X, X^2) = \dim \mathbb{K}_2[X] = 3$.

Théorème - Cardinal d'une famille et rang

Si $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , alors

- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) \leq k$,
- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = k \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k)$ est libre.

Démonstration.

- La famille $(u_1, \dots, u_k)$ est bien sûr une famille génératrice de $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On sait alors qu'une base de F a au plus k vecteurs, et par conséquent $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = \dim F \leq k$.
- Par ailleurs, si $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = k$, c'est-à-dire $\dim F = k$, alors la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est génératrice et de bon cardinal, donc elle est libre. Réciproquement, si elle est libre, elle est libre et génératrice de F , donc $\dim F = k$. $\square$

Il est clair que les opérations qui ne changent pas l'espace vectoriel engendré ne changent pas non plus le rang. En particulier, les opérations de la méthode du pivot de Gauss laissent le rang invariant. Ceci simplifie parfois le calcul du rang.

Exemples.

1. On a $\text{rg}((1, 1, 2), (2, 1, -1), (-4, 1, 17)) = \text{rg}((1, 1, 2), \overbrace{(0, -1, -5)}^{=u_2-2u_1}, \overbrace{(0, 5, 25)}^{=u_3+4u_1}) = \text{rg}((1, 1, 2), (0, -1, -5)) = 2$, car les vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(0, -1, -5)$ sont non colinéaires, donc ils forment une famille libre.
2. On a $\text{rg}(X^2 - 1, X + 1, X^2 - X) = \text{rg}(X^2 - 1, X + 1, -X + 1) = \text{rg}(X^2 + 1, X + 1, 2) = 3$, car cette dernière famille est échelonnée en degré. Ainsi, $(X^2 - 1, X + 1, X^2 - X)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

II Sous-espaces vectoriels en dimension finie

1. Dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie

Théorème - Dimension des sous-espaces vectoriels en dimension finie

Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus,

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E.$$

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de F , alors $\mathcal{F}$ est une famille libre de E , donc $|\mathcal{F}| \leq \dim E$ puisque E a une famille génératrice de cardinal $\dim E$. On peut donc considérer une famille libre $\mathcal{F}$ de F de plus grand cardinal, noté k . Ainsi, par maximalité, tout vecteur $x \in F$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est génératrice de F . Finalement, F est de dimension finie k , et $\dim F = k \leq \dim E$.

Si $\dim F = \dim E$, la famille $\mathcal{F}$ ci-dessus est libre de bon cardinal dans E , c'est donc une base de E , et on en déduit $F = E$. La réciproque est évidente. $\square$

Remarque. En particulier, si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

Corollaire - Dimension d'un espace vectoriel et rang d'une famille

Si $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n , alors

- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) \leq n$,
- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = n \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k)$ est génératrice de E .

Démonstration. Comme $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de E , on a $\dim F \leq \dim E = n$.

Par ailleurs, on a : $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k)$ est génératrice de E . $\square$

Remarque. On retiendra donc que si E est de dimension finie n et $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille de E , alors :

- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) \leq \min(n, k)$,
- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = n \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k)$ est génératrice de E ,
- ◇ $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = k \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k)$ est libre.

2. Sommes de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème - Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E , alors F admet un supplémentaire G dans E , et on a

$$\dim F + \dim G = \dim E.$$

Démonstration. On note $n = \dim E$. On sait que F est un espace vectoriel de dimension finie, qu'on note k , et qu'il admet donc une base $\mathcal{B}_F$ notée $(u_1, \dots, u_k)$. On peut alors compléter $\mathcal{B}_F$ en une base de E , notée $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$. Ainsi, $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-k})$ sont supplémentaires dans E :

- on a $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-k}) = F + G$,
- si $x \in F \cap G$, alors x s'écrit $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-k} v_{n-k}$, mais les λ_i et les μ_j sont nuls par liberté de $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$.

On a bien trouvé un supplémentaire G , et on a $\dim G = n - k = \dim E - \dim F$. $\square$

Remarques.

- Une conséquence immédiate est que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel quelconque E et si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

- Les arguments de la preuve ci-dessus permettent d'obtenir que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont tels que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E , alors F et G sont supplémentaires dans E . Nous avons déjà rencontré la réciproque.

Théorème - Formule de Grassmann

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $F + G$ est de dimension finie, et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Démonstration. On sait qu'on peut considérer un supplémentaire $\tilde{F}$ de $F \cap G$ dans F . Nous allons montrer que $F + G = \tilde{F} \oplus G$, ce qui assurera que $F + G$ est de dimension finie, et

$$\dim(F + G) = \dim \tilde{F} + \dim G = \dim F - \dim F \cap G + \dim G.$$

- Si $x \in \tilde{F} \cap G$, alors $x \in F \cap G$ et $x \in \tilde{F}$, donc $x = 0_E$, ce qui entraîne $\tilde{F} \cap G = \{0_E\}$.
- On a $F + G = (F \cap G + \tilde{F}) + G = \tilde{F} + (F \cap G + G) = \tilde{F} + G$.

On a donc bien $F + G = \tilde{F} \oplus G$. □

On déduit de ce résultat une manière souvent plus simple de montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie.

Théorème - Caractérisation de la supplémentarité

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors

$$F \oplus G = E \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\}, \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G, \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Démonstration.

- Supposons que $F \oplus G = E$. On alors bien sûr $F \cap G = \{0_E\}$ et on a vu que $\dim E = \dim F + \dim G$.
- Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$. Comme $\dim F \cap G = 0$, on a $\dim E = \dim(F + G)$ par la formule de Grassmann. Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$, donc $E = F + G$.
- Supposons $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$. Alors $\dim F \cap G = 0$ par la formule de Grassmann, donc $F \cap G = \{0_E\}$. Ceci entraîne que $E = F \oplus G$. □

Remarque. On retiendra que pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer *seulement deux* assertions parmi les trois suivantes :

$$E = F + G, \quad F \cap G = \{0_E\}, \quad \dim E = \dim F + \dim G.$$

On peut donc remplacer une des deux assertions $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ par un argument de dimension.

Exemples.

- Si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$, alors $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
 - On a $F = \{(x, y, -3x - 2y), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -3), (0, 1, -2))$. Comme $\text{rg}((1, 0, -3), (0, 1, -2)) = 2$, on a $\dim F = 2$. Par ailleurs, $\dim G = 1$, donc $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
 - Par ailleurs, si $(x, y, z) \in F \cap G$, alors d'une part, $(x, y, z) = (x, x, x)$ et d'autre part, $0 = 3x + 2y + z = 6x$. Par conséquent, $x = 0$, donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ce qui entraîne que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
 - On a vu que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - On a par ailleurs $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{n,n}\}$: si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $M = M^\top = -M$.