

Chapitre 16

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque, qui s'avèrera être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la plupart du temps.

I Structure d'espace vectoriel

1. Espace vectoriel

Définition - Espace vectoriel

On appelle $\mathbb{K}$ -espace vectoriel un ensemble E muni d'une loi interne $+$ et d'une loi dite *externe* de $\mathbb{K} \times E$ dans E , notée $\cdot$, tel que

- ◊ $(E, +)$ est un groupe abélien,
- ◊ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= x, & \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda\mu) \cdot x, & (\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x. \end{aligned}$$

Remarques.

- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaires* et, par analogie avec le plan et l'espace, les éléments de E sont appelés *vecteurs*. On ne note généralement pas les vecteurs avec une flèche $\vec{x}$, sauf lorsqu'on fait de la géométrie.
- On dit que $\mathbb{K}$ est le corps de base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Il arrive parfois qu'on note 0 au lieu de 0_E pour désigner l'élément neutre de E . Attention toutefois à ne pas confondre 0_E et $0 \in \mathbb{K}$, qui sont des objets mathématiques différents.

Exemples.

Le corps de base : $\mathbb{K}$ muni de ses lois $+$ et $\times$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Polynômes : $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Applications : $\mathcal{F}(X, E)$, où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X un ensemble quelconque, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire : si $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \quad \lambda f : x \mapsto \lambda f(x),$$

est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Suites : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition des suites et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent.

Espace produit : Si E, F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors le produit $E \times F$ est également un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$: si $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).$$

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois produits.

Exemple important : $\mathbb{K}^n$, et en particulier $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, sont des espaces vectoriels.

Théorème - Règles de calcul

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel réel, alors pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- i. $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E).$
 ii. $-x = (-1) \cdot x.$

Démonstration.

- i. $\Rightarrow$ Si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 0_E.$
 $\Leftarrow$ – Si $\lambda = 0$, alors $\lambda \cdot x = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Ainsi, $0 \cdot x = 0_E.$
 – Si $x = 0_E$, alors $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$, donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E.$ $\square$

Remarque. Par conséquent, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
 – si $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot x = \lambda \cdot y \Rightarrow x = y$,
 – si $x \neq 0_E$, $\lambda \cdot x = \mu \cdot x \Rightarrow \lambda = \mu.$

Définition - $\mathbb{K}$ -algèbre

Un ensemble A muni de deux lois internes $+$ et $\times$, ainsi que d'une loi externe $\cdot$ est appelé une $\mathbb{K}$ -algèbre si :

- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- $(A, +, \times)$ est un anneau,
- pour tous $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y).$

Exemples. Les espaces $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ sont des $\mathbb{K}$ -algèbres.

2. Combinaisons linéaires

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition - Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ tout vecteur x de E de la forme

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Exemples.

- Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Tout vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 : $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$.
- La matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\lambda A + \mu B = M \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 3 \\ 3\lambda + 2\mu = 4 \\ -\lambda = -2 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M = 2A - B.$$

- Tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire de $(1, X, \dots, X^n)$.
- La fonction $g : x \mapsto \cos(x - 1)$ est combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(x)$: en effet, $g = \sin(1)f_1 + \cos(1)f_2$.

! Il n'y a pas toujours unicité des coefficients dans une combinaison linéaire, on ne peut donc en général pas procéder par identification : $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$ N'IMPLIQUE PAS $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i .

Exemple : $2(3, -6) - 3(2, -4) = 0(3, -6) + 0(2, -4)$, mais les coefficients ne sont pas les mêmes.

Définition - Combinaison linéaire d'une famille quelconque

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on appelle combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ toute combinaison linéaire d'un nombre fini de x_i . On peut l'écrire sous la forme

$$\lambda_{i_1} x_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} x_{i_k}.$$

On l'écrit parfois $\sum_{i \in I} x_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Remarque. Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls est parfois appelée suite presque nulle.

Exemple. $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3. Sous-espaces vectoriels

Définition-théorème - Sous-espace vectoriel

On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si $0_E \in F$, et

$$\forall x, y \in F, \quad x + y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F,$$

autrement dit, F est stable par combinaison linéaire. F est alors lui-même un espace vectoriel.

Démonstration. Exercice. □

Remarques.

- On peut remplacer la condition $0_E \in F$ par F non vide : en effet, si $x \in F$, alors $0_E = x - x \in F$.
- On peut remplacer les deux dernières conditions par : $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + y \in F$.
- Les sous-espaces vectoriels de E sont donc toutes les parties non vides de E stables par combinaisons linéaires.
- Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , dits triviaux.
- Comme pour les groupes et anneaux, on cherchera systématiquement et dès que possible à montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu pour montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

Exemples.

- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
On a $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $0 \in \mathbb{K}_n[X]$. D'autre part, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, alors on a $\deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg Q) \leq n$, donc $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble $\{X \in \mathbb{K}^p, AX = 0\}$ des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème - Intersection de sous-espaces vectoriels

Toute intersection sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E , on note $F = \bigcap_{i \in I} F_i \subset E$. On a :

- $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$, donc $0_E \in F$,
- si $x_i \in F_i$ pour tout $i \in I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors par stabilité des F_i par combinaison linéaire, on a $\lambda x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$, donc $\lambda x + y \in F$. □

⚠ En revanche, comme pour les groupes, l'union de deux sous-espaces vectoriels F et G de E n'est pas toujours un sous-espace vectoriel. On peut même montrer, toujours comme pour les groupes, que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$ (voir TD).

4. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition-théorème - Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie de E . L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A est noté $\text{Vect}(A)$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel contenant A , qui est le plus petit au sens de l'inclusion :

si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A , alors $\text{Vect}(A) \subset F$.

Démonstration. $\text{Vect}(A)$ est une intersection de sous-espaces vectoriels de E donc un sous-espace vectoriel lui-même, il contient A car tous le contiennent. Par construction, tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{Vect}(A)$. $\square$

Exemples. – $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

– Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{Vect}(F) = F$.

Remarque. Si A, B sont des parties de E et $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Théorème - Sous-espace vectoriel engendré et combinaisons linéaires

Si $A \subset E$, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A .

Démonstration. On note G l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A .

- Tout d'abord, $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A , donc par stabilité, il contient ses combinaisons linéaires. On a donc $G \subset \text{Vect}(A)$.
- Ensuite, G est un sous-espace vectoriel de E : il contient 0 et est stable par combinaison linéaire. Comme il contient A , on a $\text{Vect}(A) \subset G$. $\square$

Remarque. Le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ sera souvent noté $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ au lieu de $\text{Vect}(\{x_i, i \in I\})$.



Montrer que F est un sous-espace vectoriel

Pour montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on peut donc alternativement :

- montrer que $0_E \in F$, et que F est stable par combinaison linéaire.
- décrire F comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs particulière de E .

On privilégiera la seconde option dès que possible, car elle fournit davantage d'informations sur le sous-espace vectoriel F .

Exemples.

- Si $x \in E$, alors $\text{Vect}(x) = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Si $x \neq 0_E$, on dit que $\text{Vect}(x)$ est la droite vectorielle engendrée par x .
- Si $x, y \in E$, alors $\text{Vect}(x, y) = \{\lambda x + \mu y, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$.
- $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, et $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- L'ensemble $F = \{(x, y, -2x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

En effet, on peut écrire $E = \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -2), (0, 1, 1))$, ce qui implique que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (donc un espace vectoriel).

- $\mathcal{M}_4(\mathbb{K}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
- Dans $\mathbb{K}[X]$, $\{aX^2 + bX - a, a, b \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(X^2 - 1, X)$.
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système linéaire $AX = 0$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est $\{(-z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$, donc $\mathcal{S} = \{z(-1, -2, 1), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, -2, 1))$.

Théorème - Propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

i. Si x_n est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$ alors

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

ii. Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres, ou multiplier un vecteur par un scalaire non nul ne change pas le sous-espace vectoriel engendré :

- si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right)$.
- si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Ces deux propriétés s'étendent à une famille quelconque de vecteurs de E .

Démonstration.

- On a déjà $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Par ailleurs, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel qui contient $x_1, \dots, x_n$ par hypothèse, donc il contient $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
- Comme $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on a $\text{Vect}\left(x_1, \dots, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Montrons l'autre inclusion : si $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_n \lambda_i) x_i + \alpha_n \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right) \in \text{Vect}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right).$$

- Le deuxième point est clair en remarquant qu'on peut passer d'une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, \lambda x_n)$ à une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ en écrivant $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \lambda_1 x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} (\lambda x_n)$. $\square$

Exemple. On peut simplifier l'écriture du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (-1, 1, 0), (2, 1, 1))$:

$$F = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 3, 1), (0, -3, -1)) = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, 3, 1)).$$

II Familles remarquables de vecteurs

1. Familles génératrices

Définition - Famille génératrice

On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *génératrice* de E , ou encore que la famille $(x_i)_{i \in I}$ *engendre* E si $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Cela revient à dire que tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Remarques.

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est donc génératrice de E si et seulement si $\forall x \in E, \exists i_1, \dots, i_n \in I, x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} x_{i_k}$.
- On dit aussi qu'une partie $A \subset E$ engendre E lorsque $E = \text{Vect}(A)$.
- Toute famille contenant une famille génératrice est également génératrice.

Exemples.

- La famille $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{K}^2$ est génératrice de $\mathbb{K}^2$: tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ s'écrit $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, et est donc combinaison linéaire de $((1, 0), (0, 1))$.
- Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.
- La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X] : \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$.
- La famille $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- La famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ engendre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$.

Exercice 1. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0, x + 2y - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une famille génératrice.

Exercice 2. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une famille génératrice.

Nous allons faire les deux en même temps. On sait que 1 est racine de $P \in \mathbb{R}_3[X]$ si et seulement s'il est sous la forme $P = (X - 1)Q$, avec $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\begin{aligned} F &= \{(X - 1)(aX^2 + bX + c), a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1), a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), (X - 1)). \end{aligned}$$

ensemble des combinaisons linéaires de $X^2(X - 1), X(X - 1), (X - 1)$

2. Familles libres, familles, liées

Définition – Familles libres et liées, cas d'un nombre fini de vecteurs

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E est *libre*, ou que $x_1, \dots, x_n$ sont *linéairement indépendants* si la seule combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ nulle a tous ses coefficients nuls :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dans le cas où la famille n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls* tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E, \quad (L)$$

on dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est *liée*. On dit que l'égalité (L) est une *relation de liaison* de $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarques.

- **Cas de deux vecteurs** : une famille (x, y) est liée si et seulement si l'un des vecteurs x, y est multiple de l'autre, on dit alors qu'ils sont colinéaires.
- **Identification** : une famille libre est exactement une famille pour laquelle les coefficients d'une combinaison linéaire sont uniques. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on peut donc identifier :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i.$$

En effet, $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$ s'écrit aussi $(\lambda_1 - \mu_1)x_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)x_n = 0_E$.

- **Liaison et combinaisons linéaires** : une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres :
 - ◊ si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres, on obtient directement une relation de liaison,
 - ◊ si $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$ est une relation de liaison avec $\lambda_i \neq 0$, alors $x_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$.
- **Famille incluse dans une famille libre** : toute famille incluse dans une famille libre est libre. De manière équivalente, toute famille contenant une famille liée est liée.

Pour le deuxième point, il suffit de voir que si une famille X est incluse dans une famille Y , toute relation de liaison pour X l'est aussi pour Y . La première est la contraposée.

Exemples.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Supposons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, \dots, 0)$. Ceci se réécrit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. $\square$

2. Si $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration. Suppose que $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n = 0_{\mathbb{K}[X]}$, c'est-à-dire que P est le polynôme nul. Alors, ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. $\square$

3. Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ est libre.

4. La famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Supposons que $\lambda \cos + \mu \sin = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$.

En choisissant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient alors $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$, et la famille est libre. $\square$

Exercice 3.

1. La famille $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $(f, \cos, \sin)$, où $f : x \mapsto \cos(x - 1)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Théorème - Famille de polynômes à degrés échelonnés

Une famille $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dite à degrés échelonnés si $0 \leq \deg P_1 < \dots < \deg P_n$, elle est alors libre.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n .

- Une famille formée d'un polynôme de degré positif est libre, car le polynôme est non nul.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que toute famille de $n - 1$ polynômes échelonnés en degrés est libre. Soient $(P_1, \dots, P_n)$ a degrés échelonnés et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Ainsi,

$$\deg(\lambda_n P_n) = \deg(-\lambda_1 P_1 - \dots - \lambda_{n-1} P_{n-1}) \leq \deg P_{n-1} < \deg P_n,$$

ce qui est impossible si $\lambda_n \neq 0$. On a donc $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0_{\mathbb{K}[X]}$, et l'hypothèse de récurrence assure que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ par liberté de la famille $(P_1, \dots, P_{n-1})$. $\square$

Remarque. Plus généralement, nous avons montré que toute famille de polynômes non nuls à degrés deux à deux distincts est libre.

Théorème - Ajout d'un vecteur à une famille libre

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et y n'est pas combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$, alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ est libre.

Démonstration. Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et $(x_1, \dots, x_n, y)$ est liée. Il existe alors une relation de liaison $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda y = 0_E$. On a $\lambda \neq 0$, sinon $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ est une relation de liaison pour $(x_1, \dots, x_n)$, donc on a $y = -\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$, et y est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$. $\square$

On peut en fait généraliser la définition ci-dessus au cas d'une famille quelconque de vecteurs de E . Les propriétés sont alors les mêmes, et sont obtenues avec des démonstrations identiques.

Définition - Famille libre, cas général

On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E est *libre* si la seule combinaison linéaire nulle de $(x_i)_{i \in I}$ a tous ses coefficients nuls : pour toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}$,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Remarque. Comme précédemment, on rappelle que la somme ci-dessus est finie, les coefficients λ_i non nuls étant en nombre fini. On peut reformuler la définition ci-dessus de la manière suivante : $(x_i)_{i \in I}$ est libre si pour tous $i_1, \dots, i_n \in I$, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ est libre.

Exemple. La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre : si $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, on a vu que la famille $(X^{i_1}, \dots, X^{i_n})$ est libre.

3. Base

Définition - Base d'un espace vectoriel

On appelle base de E une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Exemples. Les exemples qui suivent proviennent des exemples précédents, nous avons vu que les familles suivantes sont à la fois libres et génératrices, et sont donc des bases. Elles ont en commun d'être les bases "naturelles" dans leur espace vectoriel. On dit qu'il s'agit de bases *canoniques*.

- **Base canonique de $\mathbb{K}^n$** : la famille $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$** : la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Par exemple :

◊ la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

◇ la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, encore noté $\underline{\mathbb{K}}^n$.

- **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$** : $(1, X, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- **Base canonique de $\mathbb{K}[X]$** : $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. Dans la pratique, pour trouver une base d'un espace vectoriel, on déterminera une famille génératrice, et on cherchera ensuite à prouver qu'elle est libre. Si elle ne l'est pas, il conviendra de lui retirer suffisamment de vecteurs pour qu'elle le devienne.

Théorème et définition - Coordonnées dans une base

Une famille $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une base si et seulement si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$: il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Les coefficients λ_i sont alors appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. On remarque déjà que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice si et seulement s'il y a existence d'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ comme ci-dessus pour tout $x \in E$.

Par ailleurs, l'unicité équivaut à la liberté de la famille :

- si $\mathcal{B}$ est libre, alors le principe d'identification donne l'unicité des coefficients des combinaisons linéaires,
- s'il y a unicité, alors la seule combinaison linéaire nulle n'a que des coefficients nuls, c'est la liberté ! □

Remarque. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E , on peut :

- montrer séparément que la famille est génératrice, et libre,
- fixer un vecteur de E , et déterminer (de manière unique) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples.

1. La famille $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) = (a, a + b, a + b + c)$. Ceci se réécrit

$$\begin{cases} a &= x \\ a + b &= y \\ a + b + c &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= x \\ b &= y - x \\ c &= z - y \end{cases}$$

Ceci donne l'existence et unicité des coefficients a, b, c . $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et les coordonnées de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sont données par $(x, y - x, z - y)$.

2. Si $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

En effet, la formule de Taylor donne que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k,$$

donc $\mathcal{B} = (1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. Elle est par ailleurs libre car échelonnée en degré, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $(P(a), P'(a), \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!})$.

Polynômes interpolateurs de Lagrange. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On introduit les polynômes *interpolateurs de Lagrange* $L_0, \dots, L_n$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$, donnés par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}. \quad \text{Alors, } L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration.

- Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$: si $Q = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$, on a $Q(x_j) = P(x_j)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Ainsi, les polynômes P et Q coïncident en $n+1$ points, donc sont égaux. On en déduit que $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
- C'est par ailleurs une famille libre : si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont tels que

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i = 0_{\mathbb{K}[X]}, \quad \text{alors pour tout } j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_j = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x_j) = 0.$$

□

Exercice 4. Trouver une base du sev $\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

III Somme de sous-espaces vectoriels

1. Définition

Définition-théorème - Somme de deux sous-espaces vectoriels

On appelle somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E l'ensemble

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

Ainsi défini, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G .

Démonstration. On a tout d'abord $0_E \in F + G$: $0_E \in F$ et $0_E \in G$, et $0_E = 0_E + 0_E$. Par ailleurs, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, x' \in F$, $y, y' \in G$, alors $\lambda(x + y) + x' + y' = (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \in F + G$. Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

On remarque que $F \subset F + G$ car si $x \in F$, on a $x = x + 0_E \in F + G$, et de même $G \subset F + G$. Montrons que c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G : si H est un sous-espace vectoriel tel que $F \subset H$ et $G \subset H$, alors pour tous $x \in F$ et $y \in G$, on a $x + y \in H$ par stabilité de H par $+$. On a donc bien $F + G \subset H$. □

Exemples.

1. Si $F = \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$ et $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, alors

$$F + G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} \right\} = \mathcal{M}_2^+(\mathbb{K}).$$

2. Soient $F = \text{Vect}(1, X^2)$ et $G = \text{Vect}(X, X^3)$, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

$$\text{On a } F + G = \{(a + bX^2) + (cX + dX^3), a, b, c, d \in \mathbb{K}\} = \{dX^3 + bX^2 + cX + a, a, b, c, d \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}_3[X].$$

Théorème -

Si A et B sont des parties de E , alors $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A \cup B)$. En particulier, si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , alors

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G).$$

Démonstration.

- Tout élément de $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ est somme d'une combinaison linéaire des vecteurs de A et d'une combinaison linéaire de vecteurs de B , c'est une combinaison linéaire de vecteurs de $A \cup B$: $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$.
- Ensuite, $A \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ et $B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$, donc $A \cup B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$. Comme $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel contenant $A \cup B$, il contient $\text{Vect}(A \cup B)$. □

Remarque. Par conséquent, si $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_m)$, où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in E$, alors

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Plus généralement, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E et $J \subset I$, alors $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \text{Vect}(x_i)_{i \in J} + \text{Vect}(x_i)_{i \in I \setminus J}$.

2. Somme directe

Définition – Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en *somme directe* si tout vecteur $x \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Dans ce cas, la somme $F + G$ est notée $F \oplus G$.

On a généralement recours à la caractérisation suivante pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

Théorème – Caractérisation de la somme directe

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarque. Comme on a toujours $0_E \in F \cap G$, il suffira de montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ (c'est-à-dire que tout vecteur de $F \cap G$ est nul) pour obtenir que $F \cap G = \{0_E\}$, et donc que F et G sont en somme directe.

Démonstration.

- Supposons F et G en somme directe, et considérons $x \in F \cap G$. On peut alors écrire $x = x + 0_E = 0_E + x$, en considérant dans la première décomposition que $x \in F$, et $x \in G$ dans la seconde. L'unicité de la décomposition donne $x = 0_E$, donc $F \cap G = \{0_E\}$.
- Si maintenant $F \cap G = \{0_E\}$, on considère $z \in F + G$, et on suppose que z admet les deux décompositions $z = x + y = x' + y'$, avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$. On a alors $x - x' = y' - y$.

Comme $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$, on a $x - x' \in F \cap G = \{0_E\}$, et $x - x' = 0_E$, donc $x = x'$. Bien sûr, on a donc aussi $y = y'$. On a donc bien montré l'unicité de la décomposition, ce qui conclut. $\square$

Exemples.

- Soient $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X], P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{K}_3[X], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, qui sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_3[X]$. La somme $F + G$ est directe.

Supposons $P \in F \cap G$, alors P a 0, 1, 2, 3 pour racines. En tant que polynôme de $\mathbb{K}_3[x]$ qui a 4 racines, P est donc le polynôme nul. On a donc bien $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

- Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f \text{ est constante}\}$, alors la somme $F + G$ est directe.

Soit $f \in F \cap G$. La fonction f est constante, et $f(0) = 0$, donc f est la fonction constante nulle. On a donc bien $F \cap G = \{0_E\}$.

Théorème et définition – Base adaptée

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe et $\mathcal{B}_F = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{B}_G = (y_1, \dots, y_m)$ sont des bases respectives de F et G , alors $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est une base de $F \oplus G$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Démonstration.

- Nous avons déjà vu que $F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $F \oplus G$.
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ sont tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = 0_E, \quad \text{alors} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = 0_E,$$

car $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in F$ et $\mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m \in G$ et la somme est directe. La liberté de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ donne alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. $\square$

Remarques.

- On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ obtenue en joignant les vecteurs de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est la *concaténation* des deux bases.
- Le résultat est toujours vrai avec des bases quelconques : si $\mathcal{B}_F = (x_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{B}_G = (y_j)_{j \in J}$ sont des bases respectives de F et G , la concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F \oplus G$.

- Le deuxième point de la démonstration montre que si F et G sont en somme directe, alors la concaténation d'une famille libre de F et d'une famille libre de G est une famille libre.

3. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition – Sous-espaces supplémentaires

On dit que F et G sont *supplémentaires dans* E si $E = F \oplus G$.

Autrement, dit F et G sont supplémentaires dans E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Remarques.

- Attention à ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est d'ailleurs jamais un espace vectoriel : il ne contient pas 0_E .
- Un supplémentaire n'est en général pas unique. Par exemple, n'importe quelle droite vectorielle différente de l'axe des ordonnées est un supplémentaire de l'axe des ordonnées. De même, dans l'espace, toute droite vectorielle n'appartenant pas à un plan vectoriel est supplémentaire de ce dernier.

Théorème – Caractérisation de la supplémentarité

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$\begin{aligned} \diamond F + G &= E, \\ \diamond F \cap G &= \{0_E\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Ceci découle directement de la définition : $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et la somme est directe, c'est-à-dire $F \cap G = \{0_E\}$. $\square$



Montrer que F et G sont supplémentaires

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E ,

- soit on montre que tout vecteur de E se décompose *de manière unique* comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (par exemple par analyse-synthèse),
- soit on montre que
 - $\diamond$ tout vecteur de E est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ,
 - $\diamond$ tout vecteur de $F \cap G$ est nul.

Exemples.

1. Si $F = \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$ et $G = \text{Vect}(A_1, A_2)$, où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = F \oplus G$.

– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b+c & 0 \end{pmatrix} \in F + G$, donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = F + G$.

– Si $M \in F \cap G$, alors $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, mais aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

En identifiant, on obtient que $a = b = c = d = 0$, donc M est nulle. On a donc bien $F \cap G = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}\}$.

2. Si $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E, f \text{ est paire}\}$ et $G = \{f \in E, f \text{ est impaire}\}$, alors $E = F \oplus G$.

– *Analyse* : soient $\varphi \in E$ et $f \in F, g \in G$ telles que $\varphi = f + g$. Comme f est paire et g impaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$. Ainsi,

$$\begin{cases} \varphi(-x) &= f(x) - g(x) \\ \varphi(x) &= f(x) + g(x) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} f(x) &= \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)) \\ g(x) &= \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(-x)) \end{cases}$$

– *Synthèse* : réciproquement, si $f : x \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x))$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(-x))$, alors f est paire et g impaire, et on a bien $\varphi = f + g$.

Ainsi, toute fonction de E s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, donc $E = F \oplus G$.

Exercice 5. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriel de E :

$$F = \{f \in E, f \text{ est constante}\}, \quad \text{et} \quad G = \left\{f \in E, \int_0^1 f(t) \, dt = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.