Chapitre 10

Matrices – Systèmes linéaires

Dans toute le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. Définitions

Définition - Matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$. On appelle *matrice* de taille $n \times p$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Les éléments $a_{i,j}$ sont appelés les *coefficients* de la matrice A, et on représente A sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Par défaut, les coefficients d'une matrice A sont notés $a_{i,j}$, $A_{i,j}$ ou encore $A[i,j]$. Les coefficients de la forme $a_{i,i}$ sont appelés coefficients *diagonaux* de A, et ces coefficients forment la *diagonale* de A.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- *Cas* $n = 1$: on dit que A est une matrice *ligne*.
- *Cas* $p = 1$: on dit que A est une matrice *colonne*.
- *Cas* $n = p$: on dit que A est *carrée*, et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemples.

1. On appelle *matrice nulle* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $0_{n,p}$ ou encore simplement 0, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.
2. On appelle *matrice identité* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres valent 0 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Définition - Matrices élémentaires

Pour tous $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{k,l}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf $E_{k,l}[k,l]$, qui vaut 1. En d'autres termes, pour tous i,j, $E_{k,l}[i,j] = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$.
Les matrices $E_{k,l}$ sont appelées les *matrices élémentaires* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple. Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Deux matrices sont égales si elles ont même taille, et ont les mêmes coefficients : si $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A = B$ si et seulement si pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Notation - Lignes et colonnes

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $L_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ la i-ème ligne de A, et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sa j-ème colonne.

2. Addition et multiplication par un scalaire

Définition - Addition et multiplication par un scalaire.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- ⋆ On définit la matrice $A+B$ comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont donnés par
$$(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!].$$
- ⋆ On définit la matrice λA comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont donnés par
$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!].$$

Remarques.

- La matrice $A+B$ est obtenue en additionnant les coefficients de A et ceux de B, et la matrice λA est obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ.
- Les opérations étant, coefficient par coefficient, celles de $\mathbb{K}$, elles jouissent des mêmes propriétés.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $2B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition - Combinaison linéaire

On appelle *combinaison linéaire* des matrices $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Théorème - Matrices élémentaires

Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$. □

3. Produit matriciel

Définition - Produit matriciel

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$,
$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}.$$

⚠
- Le produit AB n'est défini que si les tailles des deux matrices sont compatibles : $A \in \mathscr{M}_{n,p}$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}$.
- On remarquera la correspondance des tailles : **(n,p)** × **(p,q)** ⇝ **(n,q)**.

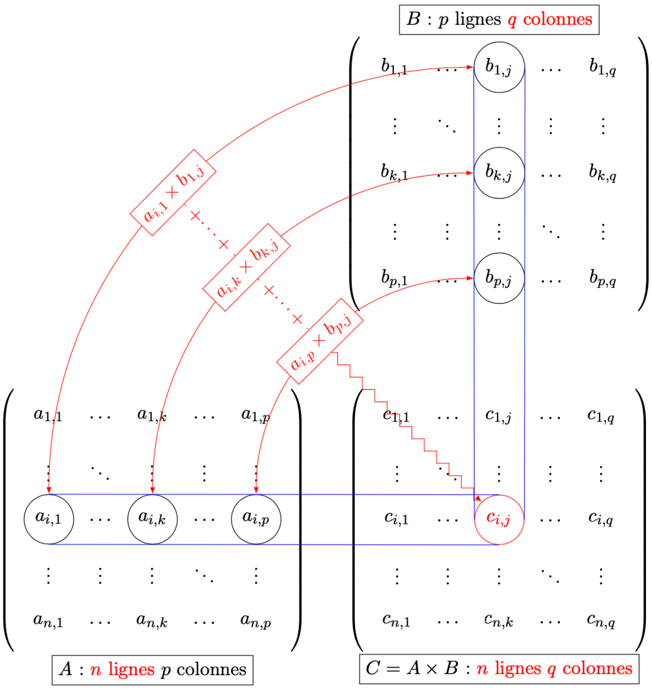
Remarques.

- On note que si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![p,q]\!]$,
  - ⋄ $(AB)_{i,j} = L_i(A) C_j(B) \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$,
  - ⋄ $L_i(AB) = L_i(A)\, B \in \mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{K})$.
  - ⋄ $C_j(AB) = A\, C_j(B) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- On peut toujours faire le produit de matrices carrées de même taille, et on obtient alors une matrice carrée de même taille. On dit que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le schéma ci-dessous représente la manière de comprendre le calcul du produit de deux matrices. Il pourra être utile dans un premier temps de présenter les deux matrices de cette manière pour faire le calcul de leur produit.



Remarques.

– Le produit matriciel n'est pas commutatif : même lorsque les deux matrices existent et ont même taille, en général,

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Lorsque AB et BA sont bien égales, on dit que A et B *commutent*.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on prendra garde au fait qu'en général $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$, et $(A-B)(A+B) \neq A^2-B^2$.

– Par ailleurs, deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul.

$$\boxed{AB = 0 \quad \text{n'implique pas} \quad (A = 0 \text{ ou } B = 0)}$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Une conséquence importante est que même lorsque A est non nulle,

$$\boxed{AB = AC \quad \text{n'implique pas} \quad B = C}$$

⚠ On ne divise *jamais* par une matrice, une telle opération n'a jamais de sens.

Théorème - Propriétés du produit matriciel

i. *Associativité* : si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(AB)C = A(BC)$.

ii. *Distributivité* : – si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $A(B+C) = AB+BC$,
– si $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $(A+B)C = AC+BC$.

iii. *Élément neutre* : si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $I_n A = A I_p = A$.

iv. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

Démonstration. À l'exception de l'associativité, toutes ces propriétés découlent directement des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}$. Vérifions donc $A(BC) = (AB)C$: il s'agit de montrer que pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, $(A(BC))_{i,j} = ((AB)C)_{i,j}$. On a

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\,(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \sum_{l=1}^{q} b_{k,l}c_{l,j} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j} = \sum_{l=1}^{q}(AB)_{i,l}c_{l,j} = ((AB)C)_{i,j}. \qquad \square$$

Théorème - Produit avec une matrice colonne ou une matrice ligne

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors AX est la combinaison linéaire suivante des colonnes de A :

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k\, C_k(A), \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

  En particulier, $A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la i-ème colonne de A.

  i-ème position

- Si $X \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors XA est la combinaison linéaire suivante des lignes de A :

$$XA = \sum_{k=1}^{n} x_k L_k(A), \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

  En particulier, $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} A$ est la i-ème ligne de A.

  i-ème position

Démonstration. Il s'agit de montrer que les coefficients des matrices colonnes AX et $C = \sum_{k=1}^{p} x_k\, C_k(A)$ sont les mêmes. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$(AX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}X_{k,1} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k(A)_{i,1} = C_{i,1}.$$

Le deuxième point est similaire. $\square$

Produit de matrices élémentaires. Si $E_{k,l}$ et $E_{k',l'}$ sont des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$E_{k,l}\, E_{k',l'} = \delta_{k',l}\, E_{k,l'}.$$

Démonstration. Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$(E_{k,l}\,E_{k',l'})[i,j] = \sum_{m=1}^{n} E_{k,l}[i,m]E_{k',l'}[m,j] = \sum_{m=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{l,m}\delta_{k',m}\delta_{l',j} = \delta_{k',l}\delta_{k,i}\delta_{l',j} = \delta_{k',l}\, E_{k,l'}[i,j]. \qquad \square$$

4. Transposée d'une matrice

Définition - Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la *matrice transposée* de A comme la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ notée $A^\top$ (ou encore ${}^tA$) telle que pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$,

$$(A^\top)_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque. La transposition d'une matrice a pour effet de transformer les lignes en colonnes et réciproquement : pour tous i,j, on a $L_i(A^\top) = C_i(A)^\top$ et $C_j(A^\top) = L_j(A)^\top$.

Exemples. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, et pour tous $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a $(E_{k,l})^\top = E_{l,k}$.

Théorème - Propriétés de la transposition

- *Involutivité* : si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\left(A^\top\right)^\top = A$.
- *Linéarité* : si $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$.

– Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent directement des définitions, et sont laissées en exercice. Montrons la troisième : d'après la définition de la transposition, on a $(AB)^\top \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que pour tous $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$, on a $((AB)^\top)_{i,j} = (B^\top A^\top)_{i,j}$:

$$((AB)^\top)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^p a_{j,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^p (A^\top)_{k,j}(B^\top)_{i,k} = \sum_{k=1}^p (B^\top)_{i,k}({}^tA)_{k,j} = (B^\top A^\top)_{i,j}. \qquad \square$$

Définition - Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est

– *symétrique* si $A^\top = A$, c'est-à-dire que $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous i, j,
– *antisymétrique* si $A^\top = -A$, c'est-à-dire que $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tous i, j,.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\3&4&6\end{pmatrix} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix}0&1&-5\\-1&0&2\\5&-2&0\end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

Remarques. – Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.
– Une matrice diagonale est à la fois triangulaire inférieure et supérieure.

II Matrices carrées

1. Matrices diagonales, matrices triangulaires

Définition - Matrices diagonales, matrices triangulaires

– On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls. En d'autres termes, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$$\text{On écrit parfois } A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ si } A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Les matrices diagonales de la forme λI_n sont appelées *matrices scalaires*. On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

– On dit que A est *triangulaire supérieure* si tous ses coefficients strictement sous-diagonaux sont nuls. En d'autres termes, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

On dit que A est *triangulaire supérieure* si pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

On note respectivement $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples. I_3 est diagonale, $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&3&2\end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Remarques. – Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si et seulement si $A^\top$ est triangulaire inférieure.
– Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est diagonale.

Théorème - Stabilité par combinaison linéaire et produit des matrices diagonales

– $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire : si $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $B = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots \beta_n)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda A + \mu B = \mathrm{diag}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \ldots, \lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$.
– $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel : si $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $B = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots \beta_n)$, alors $AB = \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$.

Démonstration. La stabilité par combinaison linéaire est évidente. Pour le produit, il suffit de remarquer que si $i, j, k \in [\![1, n]\!]$, alors le terme $a_{i,k}b_{k,j}$ est non nul si et seulement si $i = k = j$. On en déduit que si $i \neq j$, $(AB)_{i,j} = 0$, et si $i = j$, $(AB)_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$. □

Théorème - Stabilité par combinaison linéaire et produit des matrices triangulaires

L'ensemble $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures sont stables par combinaison linéaire et par produit.

De plus, si $A, B \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, alors $(AB)_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$. De même si $A, B \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Démonstration. La stabilité par combinaison linéaire est évidente. Intéressons-nous à la stabilité par produit de $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (le cas de $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ est analogue) : soient $A, B \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, alors

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} a_{i,k}b_{k,j}, \quad \text{car} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k < i,\ a_{i,k} = 0, \\ \text{si } k > j,\ b_{k,j} = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, si $i > j$, on a $(AB)_{i,j} = 0$, donc $AB \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. Par ailleurs, si $i = j$, on a $(AB)_{i,i} = \sum_{k=i}^{i} a_{i,k}b_{k,j} = a_{i,i}b_{i,i}$. □

2. Puissances d'une matrice carrée

Définition - Puissances successives d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit par récurrence les *puissances successives* de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A\,A^k = A^k\,A \end{cases}$$

Remarques.

- Si A n'est pas une matrice carrée, on ne peut pas définir A^k.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k, l \in \mathbb{N}$, on a $A^{k+l} = A^k A^l = A^l A^k$. En particulier, A commute avec toutes ses puissances.
- Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2, B^3, puis conjecturer une expression de B^n, et la démontrer.

Théorème - Puissances d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire

Si $A \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, alors $A^k \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. De même, si $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, alors $A^k \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

De plus, dans chacun de ces cas, les coefficients diagonaux de A^k sont $a_{11}^k, \ldots, a_{nn}^k$.

Démonstration. Le résultat s'obtient par récurrence immédiate à partir de la stabilité par produit de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. □

Remarque. Le résultat est bien sûr toujours valable pour $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème - Formule du binôme, formule de Bernoulli

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices QUI COMMUTENT. On a alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}, \quad \text{et} \quad A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}.$$

Démonstration. Les preuves sont les mêmes que celles des formules dans $\mathbb{R}$. □

Exercice 2. Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Matrices inversibles

Définition-théorème - Matrice inversible, inverse d'une matrice

- ⋆ Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Dans ce cas, la matrice B, appelée inverse de A, est unique. On la note A^{-1}.
- ⋆ On appelle *groupe linéaire* et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Supposons que A admette deux inverses B et B'. Alors on a $B' = B'(AB) = (B'A)B = B$, car $AB = B'A = I_n$. Ceci montre bien l'unicité de la matrice inverse de A. □

Remarque. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est inversible, et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Le résultat suivant assure que posséder un inverse à gauche (ou à droite) suffit pour qu'une matrice soit inversible.

Théorème

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors : A est inversible $\Leftrightarrow$ A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n$
$\Leftrightarrow$ A est inversible à droite : $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n$.

Démonstration. Plus tard. □

Exemples.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$: en effet, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- La matrice identité I_n est inversible, et $I_n^{-1} = I_n$.
- La matrice nulle $0_{n,n}$ n'est pas inversible : pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $0_{n,n}\,B = B\,0_{n,n} = 0_{n,n} \neq I_n$.

Remarque. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on a : $AB = AC \Rightarrow B = C$. On obtient en effet le résultat simplement en multipliant à gauche par A^{-1}.

Théorème - Conditions suffisantes de non inversibilité

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i). S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ non nulle telle que AB est nulle, alors A n'est pas inversible.
De même, s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que BA est nulle, alors A n'est pas inversible.

(ii). Si l'une des colonnes (*resp.* lignes) de A est une combinaison linéaire des autres colonnes (*resp.* lignes) de A, alors A n'est pas inversible.

Démonstration.

(i). Supposons que A soit inversible, alors $B = A^{-1}AB = A^{-1}0_{n,p} = 0_{n,p}$, ce qui est une contradiction.

(ii). Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 C_1(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) = 0_{n,1}$. Ainsi, en posant $X = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)^\top$, on a $AX = \lambda_1 C_1(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) = 0_{n,1}$. D'après le point précédent, comme $X \neq 0$, A n'est pas inversible. Le cas des lignes est analogue. □

Remarque. En particulier, si une colonne ou une ligne de A est nulle, A n'est pas inversible.

Exemples.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ car } L_2(A) = 2L_1(A), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ car } C_3(B) = C_1(B) + C_2(B).$$

Théorème - Inversibilité des matrices diagonales

Une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \neq 0$.
Dans ce cas, $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

Démonstration.

- Si les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous non nuls, alors $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \operatorname{diag}(1, \dots, 1) = I_n$.
- Si l'un des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est nul, alors D a une colonne nulle, et n'est pas inversible. □

Théorème - Opérations sur les matrices inversibles

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles et $p \in \mathbb{N}$. Alors

i. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ii. $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

iii. A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$, on note alors son inverse A^{-p}.

Démonstration.

i. On a $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

ii. On a $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$.

iii. On sait que A et A^{-1} commutent, donc $\left(A^{-1}\right)^p A^p = \left(A^{-1}A\right)^p = I_n{}^p = I_n$. □

Remarque.

- D'après ce qui précède, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit et transposition.
- ⚠ En revanche, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par somme (la somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général). Par exemple, $I_n + (-I_n)$ n'est pas inversible.

III Systèmes linéaires et matrices

1. Systèmes linéaires

Définition - Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Un *système linéaire* à n équations et p inconnues $x_1, \dots, x_p$ est un système d'équations de la forme

$$(\mathscr{S}) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$ pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$.

L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $(\mathscr{S})$ soit vérifié. Si $(\mathscr{S})$ admet au moins un solution, il est dit *compatible* il est *incompatible* sinon.

On peut récrire le système $(\mathscr{S})$ sous forme matricielle en remarquant que :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad (\mathscr{S}) \iff AX = B.$$

On dit alors que A est la *matrice* du système, et B son *second membre*. Lorsque B est nul, *i.e.* $b_1 = \ldots = b_n = 0$, on dit que le système est *homogène*.

Remarque. Trouver $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution du système $(\mathscr{S})$ est équivalent à trouver $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = B$. Seule diffère la représentation des solutions : sous forme de p-uplets ou de matrices colonnes.

Dans la suite, on identifiera donc souvent $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, qu'on notera parfois $\underline{\mathbb{K}}^p$, voire $\mathbb{K}^p$ en faisant un abus de notation.

Exemple. Le sytème linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} 5x - 3y + 2z & = & 2 \\ 2y + 3z & = & -1 \end{array}\right.$ se récrit matriciellement $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Il est utile de connaître l'interprétation géométrique suivante.

– si $p = 2$: l'ensemble des points (x, y) du plan qui vérifient une contrainte de la forme $ax + by = \alpha$ est une droite (si a et b ne sont pas tous les deux nuls). Résoudre un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y &= b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y &= b_2 \end{cases}$$

revient à trouver l'ensemble des points du plan qui appartiennent aux deux droites. On cherche donc l'intersection de ces droites, qui peut être vide (si les droites sont parallèles et distinctes), réduite à un point (si les droites sont sécantes), ou une droite entière (si les droites sont confondues).

– si $p = 3$: l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace qui vérifient une contrainte de la forme $ax + by + cz = \alpha$ est un plan (si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls). Résoudre un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z &= b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z &= b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z &= b_3 \end{cases}$$

revient à trouver l'ensemble des points de l'espace qui appartiennent aux trois plans. On cherche donc l'intersection de ces plans, qui peut être vide, réduite à un point, une droite, ou un plan entier, selon les cas.

2. Systèmes équivalents, opérations élémentaires

Définition - Systèmes équivalents

On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Nous allons voir qu'on peut passer d'un système linéaire à un système équivalent en effectuant certaines opérations, qu'on peut décomposer en les opérations élémentaires suivantes.

Définition-théorème - Opérations élémentaires

On appelle *opérations élémentaires* sur un système les opérations suivantes.

1. Echanger deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplier une ligne L_i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^\star$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$.

Les opérations élémentaires changent un système linéaire en un sytème linéaire équivalent.

Remarques.

– En combinant 3 et 2, on obtient que l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, où $\lambda \neq 0$ et $j \neq i$ change le système en un système équivalent.
– En appliquant plusieurs fois 3, on constate qu'ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes change le système en un système équivalent.

3. Systèmes échelonnés

Définition - Matrice échelonnée, système échelonné

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite *échelonnée* si

– chaque ligne non nulle de A commence par strictement plus de zéros que la précédente,
– lorsqu'une ligne de A est nulle, toutes les suivantes le sont.

On dit qu'un système linéaire est *échelonné* s'il est associé à une matrice échelonnée. On appelle alors *rang* du système le nombre de lignes non nulles de A.

Exemples.

– La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et donc le système linéaire $\begin{cases} 4\,x + y + z &= 2 \\ 2\,z &= 3 \end{cases}$ sont échelonnés.

– La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, et donc le système linéaire $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 2 \\ z-t & = & 3 \\ 2z+3t & = & 1 \\ 5t & = & 0 \end{array} \right.$ ne sont pas échelonnés.

Remarque. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice échelonnée, alors elle est triangulaire. En revanche, la réciproque est fausse, comme le montre le dernier exemple ci-cessus.

Résolution de système linéaire échelonné

Pour résoudre un système linéaire associé à une matrice échelonnée qui a exactement k lignes non nulles (c'est-à-dire que le rang du système est k), on procède de la manière suivante.

1. On choisit k inconnues, qui seront dites *principales*.
2. On exprime les inconnues principales en fonction des autres, qui seront dites *secondaires*, et seront traitées comme des paramètres.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\boxed{x} - 2y + z & = & -3 \\ \boxed{y} + 4z & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3\boxed{x} - 2(3-4z) + z & = & -3 \\ \boxed{y} & = & 3-4z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \boxed{x} & = & 1-3z \\ \boxed{y} & = & 3-4z \end{array} \right.$$

Les solutions sont donc tous les triplets de la forme $(1-3z,\, 3-4z,\, z)$, où $z \in \mathbb{R}$. On écrit cet ensemble sous la forme :

$$\{(1-3z,\, 3-4z,\, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{(1,3,0) + z(-3,-4,1),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

4. Méthode du pivot de Gauss

Il s'agit de se ramener au cas précédent, que l'on sait traiter. On utilise les opérations élémentaires pour se ramener à un système équivalent qui est triangulaire ou échelonné.

Exemple. Considérons

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 12 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array} \right. \qquad (\mathscr{S}_1)$$

– *Première étape :* On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système équivalent où l'inconnue x n'apparaît pas dans les deux dernières équations. Puis, on transforme ce dernier système en un système équivalent où les inconnues x et y n'apparaissent pas dans la dernière équation.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 12 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & -6y & + & 18z & = & 12 & L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ & & -3y & + & 7z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & -y & + & 3z & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2/6 \\ & & -3y & + & 7z & = & 2 & \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & -y & + & 3z & = & 2 & \\ & & & & -2z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \right.$$

– *Seconde étape :* On résout le système triangulaire ou échelonné :

$$(\mathscr{S}_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y+4z \\ y & = & 3z-2 \\ z & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 4 \\ z & = & 2 \end{array} \right.$$

Théorème - Pivot de Gauss

Tout système linéaire $(\mathscr{S})$ est équivalent à un système linéaire échelonné, obtenu à partir de $(\mathscr{S})$ par opérations élémentaires.

Nous décrivons ici l'algorithme, dit du *pivot de Gauss*, qui permet d'obtenir un système linéaire échelonné par transformations élémentaires, à partir d'un système linéaire quelconque

$$(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_n \end{array}$$

- Si $a_{1,1} \neq 0$: on utilise L_1 pour éliminer x_1 des autres lignes du systèmes, en faisant les opérations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} L_2 & \leftarrow & L_2 - \dfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}} L_1 \\ & \vdots & \\ L_n & \leftarrow & L_n - \dfrac{a_{n,1}}{a_{1,1}} L_1 \end{array}$$

- Si $a_{1,1} = 0$, il y a deux cas de figure :
  - s'il existe une ligne i telle que $a_{i,1} \neq 0$, alors on échange les lignes 1 et i : $L_1 \leftrightarrow L_i$, et on procède ensuite comme ci-dessus,
  - sinon, x_1 est quelconque : c'est une inconnue secondaire qui peut être traitée comme un paramètre, et on passe à x_2.

À la suite de cette étape, on obtient donc que le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,p}x_p & = & b'_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & a'_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{n,p}x_p & = & b'_n \end{array}\right.$$

On peut ensuite renouveler cette opération sur le système constitué des $n-1$ dernières équations. Et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention d'un système échelonné.

Exemples.

1. $$\left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x} & +y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & -1 \\ x & -y & +2z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x} & +y & +z & = & 1 \\ & -\boxed{y} & -z & = & -3 \\ & -2y & +z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x} & +y & +z & = & 1 \\ & -\boxed{y} & -z & = & -3 \\ & & 3\boxed{z} & = & 6 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x} = 1 - y - z = -2 \\ \boxed{y} = 3 - z = 1 \\ \boxed{z} = 2 \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est $(-2, 1, 2)$.

2. $$\left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x} & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +3y & -z & = & 2 \\ -x & -y & +2z & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x} & +2y & +z & = & 1 \\ & -\boxed{y} & -3z & = & 0 \\ & y & +3z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} \boxed{x} & +2y & +z & = & 1 \\ & -\boxed{y} & -3z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x} = 1 - 2y - z = 1 + 5z \\ \boxed{y} = -3z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $\{(1+5z, -3z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,0) + z(5,-3,1),\ z \in \mathbb{R}\}$. La représentation dans $\mathbb{R}^3$ des solutions est donc la droite passant par le point $(1,0,0)$, de vecteur directeur $\vec{v} : (5,-3,1)$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & = & -4 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & -2 \\ 2x & & & + & 3z & = & 7 \\ x & + & 5y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$

5. Structure de l'ensemble des solutions

Dans la suite, on considère $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et le système linéaire

$$AX = B \tag{$\mathscr{S}$}$$

Définition - Système homogène associé

On appelle système homogène associé au système $(\mathscr{S})$ le système linéaire

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$\mathscr{S}_0$}$$

Remarque. On remarque que $X = 0_{p,1}$ est toujours solution du système homogène $(\mathscr{S}_0)$. Par ailleurs, si X, Y sont des solutions de $(\mathscr{S}_0)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda X + \mu Y$ est encore une solution de $(\mathscr{S}_0)$.

Par conséquent :
- soit $(\mathscr{S}_0)$ n'a qu'une seule solution : $0_{p,1}$,
- soit $(\mathscr{S}_0)$ a des solutions non nulles, et $(\mathscr{S}_0)$ a alors une infinité de solutions.

Théorème - Structure de l'ensemble des solutions

Le système $(\mathscr{S})$ est compatible si et seulement si B est une combinaison linéaire des colonnes de A. Dans ce cas, si X_{P} est une solution particulière de $(\mathscr{S})$, alors l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est décrit par

$$\{X_{\mathrm{P}} + X,\ X \text{ solution du système homogène } (\mathscr{S}_0)\}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = B \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A) = B \\ &\Leftrightarrow \quad B \text{ est combinaison linaire des colonnes de } A. \end{aligned}$$

D'où la caractérisation de la compatibilité de $(\mathscr{S})$. Ensuite, si $X \in \mathbb{K}^p$, on a :

$$\begin{aligned} AX = B \quad \Leftrightarrow \quad AX = AX_{\mathrm{P}} \quad \Leftrightarrow \quad A(X - X_{\mathrm{P}}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad X - X_{\mathrm{P}} \text{ est une solution de } (\mathscr{S}_0) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } X_0 \text{ solution de } (\mathscr{S}_0) \text{ telle que } X = X_P + X_0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{X_{\mathrm{P}} + X_0,\ X_0 \text{ est solution de } (\mathscr{S}_0)\}$. □

Remarque. Il n'y a que trois cas possibles pour le système linéaire $(\mathscr{S})$:
- soit $(\mathscr{S})$ n'a pas de solution,
- soit $(\mathscr{S})$ a une unique solution,
- soit $(\mathscr{S})$ a une infinité de solutions.

6. Inversibilité et systèmes linéaires

Théorème - Inversibilité et systèmes linéaires

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour tout second membre $B \in \underline{\mathbb{K}}^n$, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution.

Remarque. On appelle parfois *système de Cramer* un système linéaire qui possède une unique solution.

On peut donc reformuler le résultat ci-dessus de la manière suivante : A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \underline{\mathbb{K}}^n$, le système $AX = B$ est de Cramer.

Démonstration. Si A est inversible, alors pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $AX = B \ \Leftrightarrow\ X = A^{-1}B$, donc le système $AX = B$ a une unique solution, qui est $A^{-1}B$.

Si pour tout second membre $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est de Cramer, alors on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de I_n, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i l'unique solution du système $AX = C_i$. On a alors

$$A\left(X_1 \middle| \dots \middle| X_n\right) = \left(AX_1 \middle| \dots \middle| AX_n\right) = \left(C_1 \middle| \dots \middle| C_n\right) = I_n,$$

donc A est inversible. □

Nous allons voir qu'il suffit en fait que le système homogène $AX = 0_{n,1}$ ait une unique solution pour que la matrice A soit inversible. Dans ce cas, comme on l'a déjà remarqué, l'unique solution du système homogène est $0_{n,1}$.

Définition - Noyau d'une matrice

On appelle noyau d'une matrice $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0_{n,1}$, on le note $\operatorname{Ker} A$:

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathbb{K}^p,\ AX = 0_{n,1}\}.$$

Théorème - Inversibilité et noyau

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}.$$

En d'autres termes, A est inversible si et seulement si le système $AX = 0_{n,1}$ a pour unique solution $0_{n,1}$.

Démonstration. Le sens direct est bien sûr une conséquence du théorème précédent. Le sens réciproque sera démontré plus tard. □

IV Méthodes de calcul d'inverse

1. Inverse des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

Il est aisé de déterminer si une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible, et de trouver son inverse dans ce cas. Nous verrons que la situation est bien différente pour les matrices de plus grande taille.

Théorème - Inversibilité des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On appelle *déterminant* de A le scalaire $ad - bc$, qu'on note $\det A$ ou encore $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$.

Démonstration. On remarque que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent,

- si $ad - bc \neq 0$, alors $A \times \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right) = I_2$, donc A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$.
- si $ad - bc = 0$, alors $A\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right) = 0_{2,2}$, ce qui implique que A n'est pas inversible. □

Remarque. Nous généraliserons plus tard ce résultat aux matrices de plus grande taille, mais nous verrons que le calcul du déterminant est plus délicat.

2. Polynôme annulateur et inversibilité

Lorsqu'on parvient à écrire une puissance d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ comme une combinaison linéaire d'autres puissances de A, on peut dans certains cas conclure à l'inversibilité de A, et calculer son inverse.

Polynômes annulateurs et calcul d'inverse. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n},$$

où $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, on dit que le polynôme $a_k X^k + \ldots + a_1 X + a_0$ est un polynôme *annulateur* de A.
Si $a_0 \neq 0$, on peut en déduire que A est inversible et calculer aisément son inverse :

$$-\frac{a_k}{a_0} A^k + \ldots - \frac{a_1}{a_0} A = I_n, \quad \text{donc} \quad A\left(-\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} + \ldots - \frac{a_1}{a_0} I_n\right) = I_n.$$

Ceci montre que A est inversible, et $A^{-1} = -\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} + \ldots - \frac{a_1}{a_0} I_n$.

Exemple. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $A^3 - 3A = 2I_n$, alors $A(A^2 - 3I_n) = 2I_n$, puis $A\left(\frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right)\right) = I_n$, donc A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right)$.

Remarque. Si $a_0 = 0$ dans la relation ci-dessus, le résultat devient faux. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = A$, mais A n'est pas inversible.

3. Résolution d'un système linéaire

On sait que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour tout second membre $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$ est de Cramer. Ceci fournit un moyen de déterminer si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, et de déterminer son inverse le cas échéant.
On fixe un second membre quelconque $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et on échelonne le système $AX = B$ par pivot de Gauss.

- Si le système est de rang strictement intérieur à n, alors A n'est pas inversible.
- Si le système est de rang n, alors A est inversible, on trouve $X = A^{-1}B$ puis A^{-1} par identification.

Exemple. Pour déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on note $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on résout $AX = B$:

$$AX = B \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & & +z & = a \\ 2x & -y & +z & = b \\ -x & +y & -z & = c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & & +z & = a \\ & -y & -z & = b - 2a \\ & y & & = c + a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & & +z & = a \\ & -y & -z & = b - 2a \\ & & -z & = -a + b + c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rlrr} x & = & b & +c \\ y & = a & & +c \\ z & = a & -b & -c \end{array}\right.$$

L'unique solution est $X = \begin{pmatrix} b + c \\ a + c \\ a - b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Algorithme de Gauss-Jordan

Nous avons introduit trois opérations élémentaires sur les systèmes linéaires. Nous allons à présent introduire les mêmes opérations sur les matrices :

- On note $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui consiste à échanger les lignes i et j d'une matrice.
- On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ l'opération qui consiste à multiplier par $\lambda \in \mathbb{K}$ la ligne i.
- On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ l'opération qui consiste à ajouter λL_j à la ligne L_i.

On note par ailleurs $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ les opérations analogues sur les colonnes.

Nous allons voir que ces opérations peuvent être obtenues par multiplication (à gauche ou à droite) par des matrices bien choisies. On considère $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$.

– On appelle matrice de transposition une matrice de la forme

$$T_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On remarque que multiplier une matrice par $T_{i,j}$ à gauche revient à effectuer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, et multiplier par $T_{i,j}$ à droite revient à effectuer l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$.

– On appelle matrice de dilatation une matrice de la forme

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On remarque que multiplier une matrice par $D_i(\lambda)$ à gauche revient à effectuer l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_j$, et multiplier par $D_i(\lambda)$ à droite revient à effectuer l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

– On appelle matrice de transvection une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, c'est-à-dire

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \lambda && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \uparrow j & & \end{array} & \end{array}$$

On remarque que, dans le cas des matrices carrées, ces trois types de matrices sont inversibles. Plus précisément, si $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$,

$$T_{i,j}^{-1} = T_{i,j}, \qquad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda).$$

Par conséquent, multiplier une matrice (à gauche ou à droite) par une matrice d'opération élémentaire ne change pas le caractère inversible de la matrice.

Invrersion par Gauss-Jordan

Si on parvient, par opérations élémentaires successives sur les lignes, à obtenir I_n à partir d'une matrice A, alors, en notant $M_1, \dots, M_k$ les matrices des opérations élémentaires successives :

$$M_k \dots M_1 A \ = \ I_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad PA \ = \ I_n, \quad \text{où} \quad P = M_k \dots M_1.$$

Ainsi, on aura obtenu que A est inversible, d'inverse P. Pour trouver $A^{-1} = PI_n$, il suffit donc d'effectuer les mêmes opérations élémentaires successives sur la matrice I_n.

Dans la pratique, on pourra effectuer en parallèle les mêmes opérations sur A et sur I_n, d'après ce qui précède, lorsqu'on aura obtenu la matrice I_n à partir de A, la matrice transformée à partir de I_n ne sera autre que l'inverse de A.

Exemple. Retrouvons l'inverse de la matrice A de l'exemple de la page 14.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Inversibilité des matrices triangulaires

Théorème - Inversibilité des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

Démonstration. Le résultat repose sur l'algorithme de Gauss-Jordan : s'en convaincre ! □