Chapitre 8

# Compléments sur les nombres réels

## I Borne supérieure, borne inférieure

On considère $A$ une partie de $\mathbb{R}$.

**Définition - Borne supérieure, borne intérieure**

– Si $A$ admet un plus petit majorant, on l'appelle *borne supérieure* (ou *supremum*) de $A$ et on le note $\sup A$.
– Si $A$ admet un plus grand minorant, on l'appelle *borne inférieure* (ou *infimum*) de $A$ et on le note $\inf A$.

**Exemple**. L'ensemble $]0,1]$ a pour ensemble de minorants $]-\infty,0]$ qui a pour maximum 0, ainsi $\inf A = 0$.

**Remarque**. Par définition, si $M$ est un majorant de $A$, on a immédiatement $\sup A \leqslant M$. En d'autres termes, si $\forall x \in A,\ x \leqslant M$, alors $\sup A \leqslant M$. On a bien sûr un énoncé analogue pour $\inf A$.

**Théorème**

Si $A$ possède un maximum (*resp.* un minimum), alors $A$ admet une borne supérieure (*resp.* une borne inférieure), et $\sup A = \max A$ (*resp.* $\inf A = \min A$).

***Démonstration***. On suppose que $A$ admet un maximum, qu'on note $M$. On sait que $M$ est un majorant de $A$. Montrons que $M$ est le plus petit majorant de $A$ : si $M'$ est un majorant de $A$, alors comme $M \in A$, on a $M \leqslant M'$. Ceci conclut. □

Le résultat fondamental qui suit repose sur les axiomes permettant la constriction de l'ensemble $\mathbb{R}$. Cette construction étant hors programme, nous admettrons cette propriété, qui est par ailleurs bien intuitive.

**Théorème - Propriété de la borne supérieure, propriété de la borne inférieure**

– Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
– Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

**Remarque**. Par convention, si $A$ n'est pas majorée, on note parfois $\sup A = +\infty$. Si $A$ n'est pas minorée, on note $\inf A = -\infty$.

**Exemple**. Si $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on appelle *distance de $x$ à $A$* le réel

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf\{|x-a|,\ a \in A\}.$$

Par exemple, si $A = ]0,1[$, on a $\mathrm{d}(2,A) = 1,\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{2},A\right) = 0,\ \mathrm{d}(0,A) = 0$.

**Théorème - Caractérisation de la borne supérieure**

Si $A$ est non vide et majorée, alors

$$M = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > M - \varepsilon \end{cases}$$

La caractérisation traduit le fait que $\sup A$ est un majorant de $A$, et qu'on peut trouver un élément de $A$ arbitrairement proche de $M$. Ceci se récrit : $\forall \varepsilon > 0,\ ]M-\varepsilon, M] \cap A \neq \varnothing$.

De même, si $A$ est non vide et minorée, alors on a : $M = \inf A \iff \begin{cases} M \text{ est un minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < M + \varepsilon \end{cases}$

**Remarque**. On a en fait : ◇ $M$ est un majorant de $A \iff \sup A \leqslant M$,

◇ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > M - \varepsilon \iff \sup A \geqslant M$.

***Démonstration*.**

- Supposons que $M = \sup A$. Alors $M$ est un majorant de $A$ par définition. Montrons $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > M - \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $M$ est le plus petit majorant de $A$, le réel $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $x > M - \varepsilon$.
- Soit $M$ un majorant de $A$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > M - \varepsilon$. Montrons $M = \sup A$.

  Raisonnons par l'absurde et supposons que $M \neq \sup A$, c'est-à-dire qu'il existe un majorant $M'$ de $A$ tel que $M' < M$. On pose $\varepsilon = M - M' > 0$, on sait qu'il existe alors $x \in A$ tel que $x > M - \varepsilon$, c'est-à-dire $x > M'$. Ceci est une contradiction car $M'$ est un majorant de $A$. Ceci conclut. □

# II Approximation des réels

## 1. Partie entière

Le résultat qui suit repose sur la propriété de la borne supérieure.

**Théorème - Propriété d'Archimède de $\mathbb{R}$**

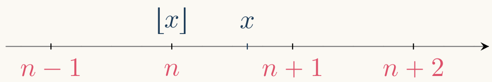
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

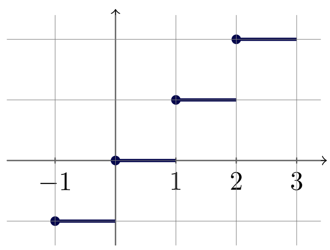
**Remarque**. La propriété d'Archimède entraîne qu'une partie $A$ de $\mathbb{N}$ qui est majorée par un réel l'est aussi par un entier. Par conséquent, elle admet un plus grand élément.

On peut déduire de ce résultat l'existence de la partie entière, que nous avons admise dans le Chapitre CALCUL ALGÉBRIQUE DANS $\mathbb{R}$.

**Théorème - Existence et unicité de la partie entière**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$. On appelle cet entier la *partie entière* de $x$, et on le note $\lfloor x \rfloor$.




***Démonstration*.**

- *Existence.* Supposons que $x \geqslant 0$. On considère l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N},\ k \leqslant x\}$ qui est non vide car $0 \in A$. Comme $A$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $x$, on sait qu'elle est majorée dans $\mathbb{N}$, donc admet un plus grand élément qu'on note $n$. On a alors $n \leqslant x$ et $n + 1 > x$ car $n + 1 \notin A$, ce qui donne $n \leqslant x < n + 1$.

  Le cas $x < 0$ est analogue, en considérant $-x$.
- *Unicité.* Si $n$ et $m$ sont deux entiers qui conviennent, alors $n \leqslant x < n + 1$ et $m \leqslant x < m + 1$, ce qui donne $n < m + 1$ et $m < n + 1$, puis $-1 < n - m < 1$. Comme $n - m$ est un entier, on a alors $n - m = 0$. □

## 2. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

**Définition - Densité**

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $a \in [x, y]$.

**Remarques**.

- En d'autres termes, $A \subset \mathbb{R}$ est dense si et seulement si tout intervalle $I$ non réduit à un point contient au moins un élément de $A$ (*i.e.* $I \cap A \neq \varnothing$).

- Il est aisé de voir que si $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| \leqslant \varepsilon.$$

  En d'autres termes, $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel $x$ est approchable arbitrairement près par des éléments de $A$.

  ***Démonstration.*** Si $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$, la densité de $A$ donne alors l'existence de $a \in A$ tel que $a \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, donc $|x - a| < \varepsilon$.

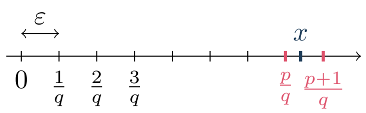
  Si $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| \leqslant \varepsilon$, on fixe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On pose $z = \frac{1}{2}(x + y)$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}(y - x)$. On sait alors qu'il existe $a \in A$ tel que $|z - a| < \varepsilon$, c'est-à-dire $z - \varepsilon < a < z + \varepsilon$, ou encore $x < a < y$, ce qui conclut. □

**Théorème - Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

***Démonstration.***

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^\star$ tel que $q > \frac{1}{\varepsilon}$, et donc $\frac{1}{q} < \varepsilon$. En notant $p = \lfloor xq \rfloor$, on a alors




$$p \leqslant xq < p + 1, \quad \text{donc} \quad \frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q}, \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p}{q} + \varepsilon.$$

  On a alors $0 \leqslant x - \frac{p}{q} \leqslant \varepsilon$, donc $|x - \frac{p}{q}| < \varepsilon$. Par conséquent, on a montré que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$. On sait par le point précédent qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|(x - \sqrt{2}) - q| < \varepsilon$, donc $|x - r| < \varepsilon$ avec $r = q + \sqrt{2}$. Or on a $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (sinon, $\sqrt{2} = r - q \in \mathbb{Q}$, et il y a contradiction). On a donc bien montré que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

### 3. Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$

**Théorème - Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$**

L'ensemble des décimaux $\mathbb{D} = \left\{\frac{k}{10^n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

***Démonstration.*** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$ (il suffit de choisir un entier $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 10}$). Par définition de la partie entière, on a $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. Ainsi, en posant $k = \lfloor 10^n x \rfloor$, on a

$$\frac{k}{10^n} \leqslant x < \frac{k}{10^n} + \frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

Par conséquent, comme $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, on a $0 \leqslant x - \frac{k}{10^n} < \varepsilon$. Comme $y = \frac{k}{10^n} \in \mathbb{D}$, on a bien trouvé un nombre $y \in D$ tel que $|x - y| < \varepsilon$, ce qui conclut. □

**Remarque.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement (1) obtenu dans la démonstration ci-dessus fournit une approximation décimale d'un réel $x$ à une précision $10^{-n}$ fixée :

- le décimal $\frac{k}{10^n}$ est une approximation de $x$ dite *par défaut*,
- le décimal $\frac{k}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ est une approximation de $x$ dite *par excès*.

## III Droite achevée

On cherche à prolonger l'ensemble $\mathbb{R}$ de manière à assurer que toute partie du nouvel ensemble admette une borne supérieure et une borne inférieure. Pour ce faire, on introduit deux nouveaux éléments $+\infty$ et $-\infty$, et on prolonge la relation d'ordre et les opérations sur $\mathbb{R}$.

**Définition - Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$**

On appelle droite achevée l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- On prolonge l'ordre $\leqslant$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $-\infty \leqslant x$ et $x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
- On prolonge l'addition en posant :

$$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$
$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad \text{et} \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

– On prolonge la multiplication et l'inverse en posant : $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$, et pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$,

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0, \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0, \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

⚠ Les formes $0 \times (\pm\infty)$ et $(-\infty) + (+\infty)$ sont indéterminées dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On étend la définition de bornes supérieures et inférieures aux parties de $\overline{\mathbb{R}}$ avec la même définition : si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, alors $\sup A$ (*resp.* $\inf A$) est le plus petit majorant (*resp.* plus grand minorant) de $A$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, s'il existe.

On peut alors déduire du résultat dans $\mathbb{R}$ et des prolongements ci-dessus le résultat suivant.

**Théorème - Bornes supérieures, inférieures dans $\overline{\mathbb{R}}$**

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $A$ admet une borne supérieure (*resp.* inférieure) dans $\mathbb{R}$, alors sa borne supérieure (*resp.* inférieure) dans $\overline{\mathbb{R}}$ est la même.

**Remarques.**

– Si $A$ est non majorée dans $\mathbb{R}$, alors son seul majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $+\infty$, donc $\sup A = +\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ceci coïncide avec la notation présentée plus haut. De même, si $A$ n'est pas minorée dans $\mathbb{R}$, alors $\inf A = -\infty$.
– Comme l'ensemble des majorants de $\varnothing$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathbb{R}}$ entier, on a $\sup \varnothing = -\infty$. De même, $\inf \varnothing = +\infty$.

# IV Intervalles de $\mathbb{R}$, de $\overline{\mathbb{R}}$

On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de l'une des formes suivantes :

◇ $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,
◇ $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
◇ $]a, b[$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$,
◇ $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$.

Plus généralement les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$, où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \leqslant b$.

**Théorème - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$**

Si $I$ est une partie de $\mathbb{R}$, alors $I$ est intervalle si et seulement si $\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$.

***Démonstration.***

– Soit $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On traite le cas où $I$ est de la forme $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, les autres étant similaires. Soient $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$. Si $z \in [x, y]$, alors on a $a \leqslant x \leqslant z \leqslant y \leqslant b$, donc $z \in [a, b] = I$.
– Supposons que $\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$. Si $I$ est majoré, on note $b = \sup I$, sinon, on pose $b = +\infty$. Si $I$ est minoré, on note $a = \inf I$, sinon on pose $a = -\infty$. On suppose par exemple que $a \in I$ et $b \notin I$ et on montre que $I = [a, b[$ (les autres cas sont similaires). On a clairement $I \subset [a, b[$, et si $x \in [a, b[$, alors $x < b$, donc il existe $y \in I$ tel que $y > x$. Comme $a, y \in I$, $[a, y] \subset I$, donc $x \in I$. □

**Remarques.**

– La même caractérisation est valable pour les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ : $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ est intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I$.
– On dit des ensembles $A$ qui vérifient la propriété $\forall x, y \in A,\ [x, y] \subset A$ qu'ils sont convexes. La caractérisation ci-dessus exprime que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$.