Chapitre 7

Applications et relations binaires

Dans tout le chapitre, E et F désignent deux ensembles.

I Applications

1. Généralités

Définition - Application, graphe

- Une *application f de E dans F* (ou fonction de E dans F) est un procédé qui à chaque élément x de E associe un unique élément de F noté $f(x)$. On note alors

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- Si $x \in E$, on appelle $f(x)$ *l'image de x par f*. Si $y = f(x)$, on dit que x est un *antécédent de y par f*.
- L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.
- On appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in E \times F,\ y = f(x)\}.$$

Remarques.

– Si $f \in \mathscr{F}(E,F)$, on dit que E est l'ensemble de départ de f, et F son ensemble d'arrivée.
– Vérifier que $f \in \mathscr{F}(E,F)$ est *bien définie* consiste à vérifier que pour tout $x \in E$, $f(x)$ existe et appartient bien à F.
– Deux applications $f, g \in \mathscr{F}(E,F)$ sont égales (on note $f = g$) si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Définition - Ensemble image

Si $f \in \mathscr{F}(E,F)$, on appelle *ensemble image*, ou simplement *image* de f l'ensemble $f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$. L'ensemble $f(E)$ est l'ensemble des *valeurs* de f.

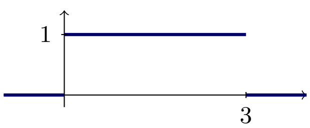
Remarque. Si B est une partie de F, on dit que $f \in \mathscr{F}(E,F)$ est *à valeurs dans B* si toutes les images de f sont dans B. Autrement dit, $f(E) \subset B$.

Applications particulières. Soit E un ensemble.

1. *Application identité* : on note Id_E l'application $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.
2. *Indicatrice d'une partie* : soit $A \subset E$. On définit la fonction *indicatrice de A* par

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Exemple. Graphe de l'indicatrice $\mathbb{1}_{[0,3]}$:



Remarque. Si A, B sont des parties de E, alors :

$$\begin{array}{lll} A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B & \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, & \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \\ A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B & \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B & \end{array}$$

Définition - Restriction, prolongement

Soit A une partie de E.

- Soit $f : E \to F$ une application. On dit appelle *restriction à* A de $f : E \to F$ l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par : $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$.
- Soit $f : A \to F$ une application. On dit que $\tilde{f} : E \to F$ est un prolongement de l'application f si pour tout $x \in A$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Exemple. Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$. La restriction $f_{|\mathbb{R}_+}$ est une fonction strictement croissante.

Définition - Composition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On définition la composition $g \circ f : E \to G$ par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarques.

- Si $f : E \to F$ est une application, on a $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.
- La composition est associative : si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to G$ sont trois applications, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

⚠ La composition n'est pas une opération commutative (même si les espaces de départ et d'arrivée peuvent parfois être les mêmes).

2. Injection

Définition - Application injective

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f *est injective* ou *est une injection* de E sur F si tout élément de F admet *au plus* un antécédent par f, c'est-à-dire si

$$\forall x, x' \in E,\quad f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'.$$

Remarques.

- On peut aussi définir l'injectivité en écrivant la contraposée de l'implication ci-dessus : $f : E \to F$ est injective si et seulement si
$$\forall x, x' \in E,\quad x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x').$$
- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ *n'est pas* injective, on montre qu'il existe x, x' dans E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Autrement dit, on montre que deux éléments distincts de E ont la même image.
- On peut retenir que $f : E \to F$ est injective sur E si elle ne prend pas deux fois la même valeur sur E. En d'autres termes, pour tout $x \in E$, la connaissance de $f(x)$ suffit pour retrouver x.

Exemples.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective : par exemple, on a $f(1) = f(-1)$.
- En revanche, l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective.

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$$

Théorème - Composition et injectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

– Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Démonstration.

– Soient $x, x' \in E$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g, on a alors $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, on a alors $x = x'$. Ceci montre que $g \circ f : E \to G$ est injective.

– Soient $x, x' \in E$. Supposons que $f(x) = f(x')$, on a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. □

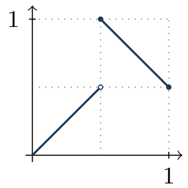
Théorème - Injectivité et stricte monotonie

Si $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone sur E, alors f est injective.

Démonstration. On suppose par exemple f strictement croissante sur E (le cas strictement décroissant est similaire). Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$, et on suppose par exemple $x < x'$. Alors $f(x) < f(x')$, ce qui est une contradiction car $f(x) = f(x')$. □

⚠ La réciproque est fausse. Une fonction réelle peut être injective sans être strictement monotone. À titre d'exemple, la fonction dont le graphe est représenté ci-contre est injective, mais pas monotone sur $[0, 1]$.

Nous verrons plus tard qu'en revanche si f est continue et injective sur un intervalle, alors elle est strictement monotone.



3. Surjections

Définition - Application surjective

Soit $f : E \to F$. On dit que f *est surjective* ou *est une surjection* de E sur F si tout élément de F admet *au moins* un antécédent dans E par f, c'est-à-dire

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si l'ensemble image de f est F tout entier : $f(E) = F$.

Exemple. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ n'est pas surjective, mais $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ l'est.

Remarques.

– Une application $f : E \to F$ est surjective de E dans F si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins une solution dans E.

– Une application qui a pour ensemble d'arrivée son ensemble image est *toujours* surjective. On retiendra :

$$f : E \to f(E) \text{ est toujours surjective.}$$

– On a *toujours* $f(E) \subset F$. Par conséquent, il suffit de montrer $F \subset f(E)$ pour montrer que f est surjective.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$$

Proposition - Composition et surjectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

– Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
– Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstration.

– Soit $z \in G$, montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Finalement, on a bien $g(f(x)) = g(y) = z$.

– Soit $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$ par surjectivité de $g \circ f$. Ainsi, $f(x)$ est un antécédent de z par g, donc g est surjective. □

4. Bijections

Définition - Application bijective

Soit $f : E \to F$. On dit que f *est bijective* ou *est une bijection* si f est injective *et* surjective, autrement dit si tout élément de F admet *un unique* antécédent dans E par f :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y.$$

Remarque. Une application $f : E \to F$ est bijective de E sur F si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution dans E.

Théorème - Bijection et réciproque

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si f admet une réciproque, c'est-à-dire une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Dans ce cas, la fonction g est unique et est appelée *application réciproque* de f, et notée f^{-1}. On a par ailleurs pour tous $x \in E$ et $y \in F$,

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Démonstration.

– Supposons $f : E \to F$ est bijective. Pour $y \in F$, on note $g(y)$ l'unique antécédent de y par f, ce qui définit une application $g : F \to E$. On a alors $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in F$, donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

  Par ailleurs, si $x \in E$, comme x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f, on a $g(f(x)) = x$, et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

– Supposons maintenant que $g : F \to E$ vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Comme $g \circ f$ est injective, f est injective, et comme $f \circ g$ est surjective, f est surjective. On en déduit donc que f est bijective. □

Remarque. Si $f : E \to F$ est bijective, alors f^{-1} est donnée par : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & \begin{array}{c}\text{l'élément } x \in E \\ \text{tel que } y = f(x)\end{array} \end{array}$

Exemples.

– L'application Id_E est une bijection de E sur E, et $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$.
– Une application $f : E \to E$ qui vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, dite *involutive*, est bijective, et $f^{-1} = f$.

Montrer la bijectivité

Pour montrer que $f : E \to F$ est bijective, on peut procéder des différentes manières suivantes :

– si on connaît la bijection réciproque $g : F \to E$: vérifier que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$,
– résoudre, pour $y \in F$ fixé, l'équation $y = f(x)$, et en déduire $f^{-1}(y)$,
– montrer séparément que f est injective, puis surjective (mais on n'obtient pas f^{-1}).

Dans le cas où $E, F \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on peut aussi recourir à la stricte monotonie pour montrer l'injectivité, ou même au théorème de la bijection si f est continue et E est un intervalle de $\mathbb{R}$ (mais on n'obtient pas f^{-1}).

Exemple. Montrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$ est bijective.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on résout l'équation $f(x, y) = (u, v)$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x + y = u \\ x - y = v \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x = u + v \\ 2y = u - v \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad (u,v) = \underbrace{\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)}_{=f^{-1}(u,v)}.$$

Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a $f^{-1} : (u,v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

Théorème - Bijectivité de la réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. Ceci découle directement des égalités $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. □

Théorème - Composition et bijectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. L'application $g \circ f : E \to G$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On a $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, et $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$. □

5. Image directe, image réciproque

Définition - Image directe, image réciproque

Soient $f : E \to F$ une application et $A \in \mathscr{P}(E)$, $B \in \mathscr{P}(F)$.

- On appelle *image directe* de A le sous-ensemble de F constitué des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F,\ \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

- On appelle *image réciproque* de B le sous-ensemble de E constitué des antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

Remarque. Si $B \in \mathscr{P}(F)$ et $x \in E$, on a l'équivalence : $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

⚠ On note $f^{-1}(B)$ même lorsque f n'est pas bijective : on retiendra qu'on a TOUJOURS LE DROIT d'écrire $f^{-1}(B)$. Dans le cas où f est bijective, l'ensemble image réciproque $f^{-1}(B)$ coïncide avec l'image directe de B par l'application f^{-1}.

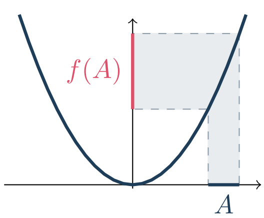
En effet, si f est bijective, l'image réciproque de B par f $\{x \in E,\ f(x) \in B\}$ se récrit $\{x \in E,\ \exists y \in B,\ f(x) = y\}$, qui n'est autre que l'image directe de B par f^{-1}.

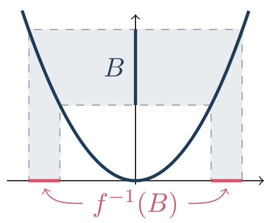
Dans le cas où f n'est pas une bijection, $f^{-1}(B)$ n'a de sens qu'en tant qu'image réciproque.

Exemple. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f : x \mapsto x^2$, alors

$$f([1, \sqrt{2}]) = [1, 2],$$
$$f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}].$$

On remarque en particulier que pour $A = [1, \sqrt{2}]$, on a $f^{-1}(f(A)) \neq A$.





II Relations binaires

1. Définition

Définition - Relation binaire

Soit $\mathscr{R}$ une partie de $E \times E$. Lorsque $(x, y) \in \mathscr{R}$, on note $x\mathscr{R}y$, et on dit que x est en relation avec y pour $\mathscr{R}$. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation binaire* sur E.

Exemples. Voici quelques exemples de relations binaires.

- L'égalité sur un ensemble E : $x\mathscr{R}y \iff x = y$.
- La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$: $x\mathscr{R}y \iff x \leqslant y$.
- L'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$: $A\mathscr{R}B \iff A \subset B$.

– La relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}$ sur Z : $a\mathscr{R}b \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ b = a + kn$.
– La relation de congruence modulo $\alpha \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $x\mathscr{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + k\alpha$.
– La divisibilité dans $\mathbb{N}$: $a\mathscr{R}b \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka$.

2. Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* si $\mathscr{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

– $\mathscr{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$.
– $\mathscr{R}$ est *symétrique* : $\forall x, y \in E,\ x\mathscr{R}y \iff y\mathscr{R}x$.
– $\mathscr{R}$ est *transitive* : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Remarque. On note souvent les relations d'équivalences $\sim$, $\simeq$, $\equiv$.

Exemples.

– La relation d'égalité sur un ensemble E est une relation d'équivalence.
– La relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
– La relation de congruence modulo $\alpha \in \mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Définition - Classes d'équivalence

Soit $\sim$ une classe d'équivalence sur E. On appelle *classe d'équivalence* d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x :
$$\mathrm{cl}(x) \;=\; \{y \in E,\ x \sim y\}.$$
On note parfois $\bar{x}$ au lieu de $\mathrm{cl}(x)$. On note $E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$.

Exemples.

1. On considère la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}^\star$ définie par : $x \sim y \iff x$ et y ont même signe. Il s'agit d'une relation d'équivalence , et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,
$$\mathrm{cl}(x) \;=\; \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^\star, \\ \mathbb{R}_-^\star & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^\star. \end{cases}$$
Ainsi, $\mathbb{R}^\star/\sim \;=\; \{\mathbb{R}_-^\star, \mathbb{R}_+^\star\}$, et on remarque que $\mathbb{R}^\star = \mathrm{cl}(-1) \sqcup \mathrm{cl}(1)$.
2. On considère la relation $\mathscr{R}_2$ de congruence modulo 2 dans $\mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z}$, alors
$$\mathrm{cl}(a) \;=\; \{b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b\ [2]\} \;=\; \{b \in \mathbb{Z},\ a \text{ et } b \text{ ont même parité}\}.$$
Ainsi, si a est pair, on a $\mathrm{cl}(a) = \{b,\ b \equiv 0\,[2]\} = 2\mathbb{Z}$, et si a est impair, on a $\mathrm{cl}(a) = \{b,\ b \equiv 1\,[2]\} = 2\mathbb{Z} + 1$. Finalement, $\mathbb{Z}/\mathscr{R}_2 = \{2\mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z} + 1\}$.

Remarques.

– Soient $\sim$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. On a $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x \sim y$.

  Si $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$, alors $x \in \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$, donc $x \sim y$.
  Si $x \sim y$ et $z \in \mathrm{cl}(x)$, alors $x \sim z$. Ainsi, $y \sim z$, et $z \in \mathrm{cl}(y)$. On a donc $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. De même, $\mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x)$.

– Deux classes distinctes sont disjointes : si $x, y \in E$ vérifient $x \nsim y$, alors $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing$.

  En effet, si on avait $z \in \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y)$, alors on aurait $x \sim z$ et $z \sim y$, donc $x \sim y$ par transitivité.

Définition - Ensemble de représentants

Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, on appelle *ensemble de représentants* pour la relation $\sim$ un ensemble A qui contient un unique élément de chaque classe d'équivalence de $\sim$.

Remarque. D'après la remarque précédent, les différentes classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de E : si A est un ensemble de représentants pour $\sim$, alors
$$E = \bigsqcup_{x \in A} \mathrm{cl}(x).$$

Exemples.

1. Si $\sim$ est la relation sur $\mathbb{R}^\star$ donnée par : $x \sim y \Leftrightarrow x$ et y ont même signe, alors $\{-1, 1\}$ est un ensemble de représentants pour $\sim$: $\mathbb{R}^\star = \mathrm{cl}(-1) \sqcup \mathrm{cl}(1)$ et $\mathbb{R}^\star / \sim = \{\mathrm{cl}(-1), \mathrm{cl}(1)\}$.
2. Si $\mathscr{R}_2$ est la relation de congruence modulo 2 dans $\mathbb{Z}$, alors $\{0, 1\}$ est un ensemble de représentants pour $\mathscr{R}_2$. On a $\mathbb{Z}/\mathscr{R}_2 = \{\mathrm{cl}(0), \mathrm{cl}(1)\}$.
3. Plus généralement, si $\mathscr{R}_n$ est la relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$, alors $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ est un système de représentants de pour $\mathscr{R}_n$. On a alors $\mathbb{Z}/\mathscr{R}_n = \{\mathrm{cl}(0), \ldots, \mathrm{cl}(n-1)\}$.

3. Relation d'ordre

Définition - Relation d'ordre

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une *relation d'ordre* si $\mathscr{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathscr{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est *antisymétrique* : $\forall x, y \in E,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathscr{R}$ est *transitive* : $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

On dit alors que E muni de l'ordre $\mathscr{R}$ est un ensemble ordonné.

Remarque. On note souvent les relations d'ordre $\leqslant$, $\preceq$, $\preccurlyeq$.

Définition - Ordre total, ordre partiel

On dit qu'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E est *totale* si $\forall x, y \in E,\ x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Sinon, on on dit qu'elle est *partielle*.

Exemples.

- La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Elle est totale.
- La relation $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Elle est partielle : par exemple, on a $\{0\} \not\subset \{1\}$ et $\{1\} \not\subset \{0\}$.
- La relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ (mais pas sur $\mathbb{Z}$). Elle est partielle : par exemple, 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2, donc 2 et 3 ne sont pas comparables.

Définition - Majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément

Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que $m \in E$ est un majorant (*resp.* un minorant) de A si $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq m$ (*resp.* $\forall x \in A,\ m \preccurlyeq x$).
- On dit que $m \in E$ est un plus grand élément (*resp.* plus petit) élément de A si m est un majorant (*resp.* un minorant) de A et $m \in A$.

Remarque. Si $A \in \mathscr{P}(E)$ a un plus grand (*resp.* plus petit) élément, il est unique. On l'appelle alors le maximum de A, noté $\max A$ (*resp.* le minimum de A, noté $\min A$).

Exemples.

- Pour la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$, l'ensemble $[0, 1[$ n'admet pas de maximum, mais il admet un minimum, qui est 0.
- Inclusion sur $\mathscr{P}(E)$:
  - $\mathscr{P}(E)$ admet $\varnothing$ pour plus petit élément pour l'inclusion : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \varnothing \subset A$.
  - $\mathscr{P}(E)$ admet E pour plus grand élément pour l'inclusion : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset E$.
- Divisibilité sur $\mathbb{N}$:
  - $\mathbb{N}$ admet 1 pour plus petit élément pour la divisibilité : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \mid n$.
  - $\mathbb{N}$ admet 0 pour plus grand élément pour la divisibilité : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \mid 0$.

Le résultat qui suit concerne $\mathbb{N}$ muni de l'ordre habituel $\leqslant$, et repose sur les axiomes qui permettent la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ (les axiomes de Peano si on suit sa construction de $\mathbb{N}$). Cette construction est hors programme.

Théorème - Parties de $\mathbb{N}$ et minimum/maximum

L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de son ordre $\leqslant$ vérifie :

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.

– Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum.

4. Équipotence

Définition - Ensembles équipotents

On dit que les ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E sur F. On notera alors $E \cong F$.

Remarque. L'équipotence vérifie les propriétés d'une relation d'équivalence : si E, F, G sont des ensembles, alors on a

- ◇ $E \cong E$ — *l'application* Id_E *est bijective,*
- ◇ $E \cong F \Rightarrow F \cong E$ — *si* $f : E \to F$ *est bijective, alors* $f^{-1} : F \to E$ *est également bijective,*
- ◇ $(E \cong F \text{ et } \cong G) \Rightarrow E \cong G$ — *si* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont bijectives, alors* $g \circ f : E \to G$ *est bijective.*

Exemples.

- ◇ $2\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$: l'application $f : n \mapsto 2n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$.
- ◇ $\mathbb{N}^\star \cong \mathbb{N}$: l'application $f : n \mapsto n - 1$ est une bijection de $\mathbb{N}^\star$ sur $\mathbb{N}$.
- ◇ $\mathbb{R} \cong]-1, 1[$: l'application th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Définition - Dénombrabilité

On dit que E est *dénombrable* si E est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Remarque. Dire qu'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$ revient à dire qu'on peut associer chaque élément de E à un nombre entier qui lui est propre, en utilisant tous les entiers. En d'autres termes, E est infini et on peut numéroter tous ses éléments de E.

Exemples. – D'après ce qui précède, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$ sont dénombrables.

– $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

On a vu (voir DM 1) que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q + 1)$. En d'autres termes, l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^\star \\ (p, q) & \mapsto & 2^p(2q + 1) \end{array}$$

est bijective. Par conséquent, $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}^\star$. Comme $\mathbb{N}^\star \cong \mathbb{N}$, on a aussi $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$.

– $\mathbb{N}^k$ est dénombrable pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

Ceci peut se voir par récurrence à l'aide du résultat précédent (exercice !).

– $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

– $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Plus de détails seront donnés l'an prochain sur ces deux derniers exemples.