Chapitre 6

Nombres complexes

I L'ensemble des nombres complexes

1. Définition

On admet ici l'existence de $\mathbb{C}$, dont on détaille les opérations ci-dessous.

Définition-théorème - Corps des nombres complexes

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$, muni de deux opérations $+$ (addition) et $\times$ (multiplication) vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$,
- tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$, où $x, y \in \mathbb{R}$,
- la somme et le produit de deux réels dans $\mathbb{C}$ coïncident avec la somme et le produit dans $\mathbb{R}$, et l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$.

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés *nombres complexes*. Par ailleurs, si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, on dit que x est la *partie réelle* de z, et on note $x = \mathfrak{Re}(z)$, et y est la *partie imaginaire* de z, et on note $y = \mathfrak{Im}(z)$. On appelle *forme algébrique* de z l'écriture $z = x + \mathrm{i}y$.

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathfrak{Re}(z) = 0$, on dit que z est *imaginaire pur*, et on note $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Remarque. L'égalité $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$ entre deux nombres complexes se traduit par deux égalités de nombres réels : $x = x'$ et $y = y'$.

Les règles de calculs de l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ donnent alors les relations suivantes.

Théorème - Opérations et parties réelles, imaginaires

Si $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Re}(z+z') &= \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Re}(z'), & \mathfrak{Re}(zz') &= \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(z') - \mathfrak{Im}(z)\,\mathfrak{Im}(z'),\\
\mathfrak{Im}(z+z') &= \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Im}(z'), & \mathfrak{Im}(zz') &= \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Im}(z') + \mathfrak{Im}(z)\,\mathfrak{Re}(z').
\end{aligned}$$

Remarques.

- Si $z \in \mathbb{C}$, alors z admet un inverse pour la loi $+$: $-z = -x + \mathrm{i}(-y)$. En effet, $z + (-z) = (x - x) + \mathrm{i}(y - y) = 0$.
- Si $z \in \mathbb{C}^\star$, alors z admet un inverse pour la loi $\times$: $\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2+y^2}$. En effet, $z \times \frac{1}{z} = \frac{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$.
- On en déduit que $\mathbb{C}$ est intègre : si $z, z' \in \mathbb{C}$ et $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$. En effet, si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z}zz' = 0$, donc $z' = 0$.

Représentation graphique

On a pour habitude de représenter les nombres complexes dans un plan : on associe tout nombre complexe z au point M de coordonnées $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$ dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On dit alors que M est l'image de z, et que z est l'affixe du point M.

On associe aussi habituellement un nombre complexe z au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$ dans le plan $\mathscr{P}$. On dira encore que z est l'*affixe* du vecteur $\vec{u}$.

Remarques. Dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

- si M est un point de $\mathscr{P}$, alors l'affixe de M est celle du vecteur $\overrightarrow{OM}$,
- si A et B sont des points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$,
- les réels ont pour image les points de l'axe $(O, \vec{\imath})$ appelé axe des réels, et les complexes imaginaires purs ont pour image les points de l'axe $(O, \vec{\jmath})$ appelé axe des imaginaires.

2. Conjugué, module

Définition - Conjugué d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle *conjugué* de z le nombre complexe $\bar{z} = \mathfrak{Re}(z) - \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z)$.

Remarques. Si $z \in \mathbb{C}$,

– $\mathfrak{Re}(\bar{z}) = \mathfrak{Re}(z)$, et $\mathfrak{Im}(\bar{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$,
– le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des réels.

Théorème - Propriétés du conjugué

Si $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}', \qquad \mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \mathfrak{Im}(z') = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple. Si $z \in \mathbb{C}$, alors $\overline{1+\mathrm{i}z} = \bar{1} + \bar{\mathrm{i}}\,\bar{z} = 1 - \mathrm{i}\bar{z}$.

Définition - Module d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle module de z le réel $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$.

Remarques.

– Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z coïncide avec sa valeur absolue.
– Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$.
– Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance entre le point d'affixe 0 et le point d'affixe z.

Théorème - Propriétés du module

Si $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$z\bar{z} = |z|^2, \qquad |\bar{z}| = |z|, \qquad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \qquad |zz'| = |z|\,|z'|, \qquad \text{et si } z' \neq 0,\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Démonstration. On note $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

– On a $z\bar{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.
– On a $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$.
– On a $|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
– $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\bar{z}\,z'\bar{z}'} = \sqrt{|z|^2\,|z'|^2} = |z|\,|z'|$.
– Si $z \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| \times |z| = \left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1$, donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. Ainsi, si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. □

Remarque. On retiendra que l'égalité $z\bar{z} = |z|^2$ permet d'écrire l'inverse de $z \in \mathbb{C}^\star$ sous la forme $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Exemples.

– Mise sous forme algébrique de $z = \frac{1}{3-\mathrm{i}}$: on a $z = \frac{\overline{3-\mathrm{i}}}{|3-\mathrm{i}|^2} = \frac{3+\mathrm{i}}{10} = \frac{3}{10} + \mathrm{i}\,\frac{1}{10}$.
– Si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2$. En effet :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + \bar{z}z' + z'\bar{z}' &= |z|^2 + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2. \end{aligned}$$

Théorème - Inégalité triangulaire

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors
$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|,$$
et il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z=\lambda z'$ ou $z'=\lambda z$. On dit alors que z et z' sont *positivement liés.*

Inégalité triangulaire généralisée. Plus généralement, si $z, z' \in \mathbb{C}$,
$$\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

Démonstration. On a vu que $|z+z'|^2 = |z|^2+2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z'})+|z'|^2$. Or on a $\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) \leqslant |\mathfrak{Re}(z\bar{z'})| \leqslant |z\bar{z'}| = |z|\,|z'|$. Ainsi,
$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2+2\,|z|\,|z'|+|z'|^2 = \big(|z|+|z'|\big)^2$$
Ainsi, en composant par la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient l'inégalité triangulaire.
Cas d'égalité.

- Supposons qu'il y a égalité. D'après ce qui précède, on a donc $\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) = |\mathfrak{Re}(z\bar{z'})| = |z\bar{z'}|$. Ainsi,
  - comme $\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) = |\mathfrak{Re}(z\bar{z'})|$, on a $\mathfrak{Re}(z\bar{z'}) \in \mathbb{R}_+$,
  - comme $\mathfrak{Re}(z\bar{z'})^2 = |z\bar{z'}|^2 = \mathfrak{Re}(z\bar{z'})^2+\mathfrak{Im}(z\bar{z'})^2$, on a $\mathfrak{Im}(z\bar{z'})=0$, donc $z\bar{z'} \in \mathbb{R}$.

  Par conséquent, $z\bar{z'} = \mathfrak{Re}(z\bar{z'}) \in \mathbb{R}_+$, et on note $\alpha = z\bar{z'} \in \mathbb{R}_+$. En multipliant par z', on obtient $\alpha z' = |z'|^2 z$. Si $z' \neq 0$, alors $z=\lambda z'$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{|z'|^2} \in \mathbb{R}_+$. Si $z'=0$, il est clair que z et z' sont positivement liés.
- Réciproquement, si z et z' sont positivement liés, alors il y a clairement égalité dans l'inégalité.

Inégalité triangulaire généralisée. Comme dans le cas réel, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire de la manière suivante :
$$|z| = |z+z'-z'| \leqslant |z+z'|+|-z'| = |z+z'|+|z'|.$$
Ainsi, $|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$. L'inégalité $|z'|-|z| \leqslant |z+z'|$ se démontre de la même façon. □

Remarques.

- Comme dans le cas de $\mathbb{R}$, on peut en fait synthétiser les inégalités triangulaires par :
$$\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z|+|z'|.$$
- Géométriquement, la condition z et z' positivement liés exprime que les vecteurs du plan d'affixes z et z' sont colinéaires dans le même sens.

3. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition - Racines carrées complexes

On appelle *racine carrée complexe* d'un nombre complexe z tout nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$.

Exemple. Les nombres complexes i et $-$i sont racines carrées complexes de -1.

⚠ Contrairement à la racine carrée d'un nombre réel positif, il n'y a pas unicité de la racine carrée d'un nombre complexe. La notation $\sqrt{x}$ est donc *interdite* si on n'a pas $x \in \mathbb{R}_+$.

Recherche des racines carrées complexes

Pour trouver les racines carrées complexes d'un nombre complexe z de forme algébrique $a+ib$, on cherche les complexes $\omega = x+\mathrm{i}y$ avec $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $\omega^2=z$, c'est-à-dire $x^2-y^2+2\mathrm{i}xy = a+\mathrm{i}b$.
L'idée est d'ajouter la condition $|\omega|^2 = z^2$, qui est clairement vérifiée lorsque $\omega^2=z$, au système obtenu. On a :
$$\omega^2 = z \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \omega^2 = z \\ |\omega|^2 = |z| \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$
Ce dernier système permet d'obtenir facilement x^2 et y^2. La relation $2xy=b$ donne par ailleurs le signe de x en

fonction de celui de y, ce qui permet de trouver les couples (x, y) qui conviennent.

Remarque. Comme nous le verrons plus loin, si $z \in \mathbb{C}^\star$, on obtient toujours exactement deux racines complexes de z, qui sont opposées.

Exemple. Déterminons les racines carrées complexes de $z = 3 - 4\mathrm{i}$.

On a $|z| = 5$, donc si $\omega = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\omega^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega^2 = z \\ |\omega|^2 = |z| \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

La condition $xy = -2$ assure que a et b sont de signes opposés. On trouve donc que les deux racines de z sont $2 - \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.

Théorème - Équations du second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Si δ est une racine carrée complexe de Δ, alors

- l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions (éventuellement confondues) $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$,
- pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$,
- on a $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Démonstration. On note $P(z) = az^2 + bz + c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Nous allons mettre l'expression de $\frac{P(z)}{a}$ sous la forme canonique :

$$\frac{P(z)}{a} = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

Ainsi, $\dfrac{P(z)}{a} = \left(z + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\delta}{2a}\right)\left(z + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\delta}{2a}\right) = (z - z_1)(z - z_2)$, et l'équation a pour seules solutions z_1 et z_2.

Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$. Ainsi,

- on a $P(0) = az_1z_2$, et comme on a aussi $P(0) = c$, on en déduit que $az_1z_2 = c$,
- on a $P(1) = a - a(z_1 + z_2) + az_1z_2 = a - a(z_1 + z_2) + c$, et comme on a aussi $P(1) = a + b + c$, on en déduit que $b = -a(z_1 + z_2)$. □

Exemple. Résolvons l'équation $2z^2 - (1 + 5\mathrm{i})z - 2(1 - \mathrm{i}) = 0$.

Le discriminant de l'équation vaut $(1 + 5\mathrm{i})^2 + 16(1 - \mathrm{i}) = -8 - 6\mathrm{i}$, qui a pour racines complexes $1 - 3\mathrm{i}$ et $-1 + 3\mathrm{i}$. Les solutions sont donc données par :

$$\frac{1 + 5\mathrm{i} \pm (1 - 3\mathrm{i})}{4}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1 + \mathrm{i}}{2} \quad \text{et} \quad 2\mathrm{i}.$$

Théorème - Système somme-produit

Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = u \\ z_1 z_2 = v \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions (éventuellement confondues)} \\ \text{de l'équation } z^2 - uz + v = 0 \end{array}$$

Démonstration. On sait que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $(z - z_1)(z - z_2) = 0$, *i.e.* $z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = 0$. Si $z_1 + z_2 = u$ et $z_1z_2 = v$, alors cette équation se récrit $z^2 - uz + v = 0$.

Le sens réciproque a été démontré dans le théorème précédent. □

Remarque. Une conséquence est que pour tous nombres complexes u, v, il existe un couple de nombres complexes dont la somme est u et le produit v.

4. Fonctions polynomiales complexes

Définition - Fonction polynomiale, racine

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est *polynomiale* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(x) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0.$$

On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une *racine* de la fonction polynomiale P si $P(a) = 0$.

Le résultat suivant relie la factorisation d'une fonction polynomiale complexe et ses racines. Il sera démontré dans le chapitre Polynômes.

Théorème - Fonction polynomiale et racines

Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Si a est une racine de P, alors il existe une fonction polynomiale $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; P(z) = (z-a)Q(z).$$

II Exponentielle complexe

1. Nombres complexes de module 1

Notation - Ensemble $\mathbb{U}$, exponentielle d'un imaginaire pur

- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble nombres complexes de module 1.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Exemples. $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1.$

Remarques.

- Les points d'affixe $z \in \mathbb{U}$ ne sont autres que les points du cercle trigonométrique. Plus précisément, le point M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \equiv x \; [2\pi]$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{C}^\star$, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. En effet, $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$.

Le résultat suivant repose directement sur la définition des fonctions circulaires cos et sin.

Théorème - Paramétrisation de $\mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Par ailleurs, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv y \; [2\pi].$$

Par conséquent, le réel θ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est unique à 2π près.

Exemple. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1$ si et seulement si $x \equiv 0 \; [2\pi]$.

Théorème - Propriétés de l'exponentielle d'un imaginaire pur

i. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, et $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

ii. Formule de Moivre. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n$, *i.e.* $\begin{cases} \cos(nx) = \mathfrak{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\right) \\ \sin(nx) = \mathfrak{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\right) \end{cases}$

iii. Formule d'Euler. Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Démonstration.

i. – On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + \mathrm{i}(\cos x\sin y + \sin x\cos y)$. Les formules d'addition permettent de conclure.

– On a $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \cos x - \mathrm{i}\sin x = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$. Par ailleurs,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\cos x - \mathrm{i}\sin x}{(\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos x - \mathrm{i}\sin x)} = \frac{\cos x - \mathrm{i}\sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

ii. Il suffit de remarquer qu'on a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ d'après le point précédent par récurrence immédiate.

iii. On a $\cos x = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, et $\sin x = \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$. □

2. Forme trigonométrique

Définition-théorème - Argument, forme trigonométrique

Si $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe un unique réel $r > 0$ et un réel θ unique à 2π près tels que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

– Un tel réel θ est appelé un *argument* de z.
– On a $r = |z|$.

On dit alors que z est écrit sous forme *trigonométrique*, ou *exponentielle*.

On appelle *argument principal* de z son unique argument dans $]-\pi, \pi]$, on le note $\arg z$.

Démonstration. *Existence* : comme $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donc $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Unicité : si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, alors $|z| = |r| = r$. Par ailleurs, on a alors $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et on sait que θ est unique à 2π-près. □

Exemples. – Forme trigonométrique de $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$: on a $z = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, $\arg z = \frac{\pi}{3}$.
– On a $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, donc $\arg(-2) = \pi$.
– On a $3\mathrm{i} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc $\arg(3\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$.

Remarques. – Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^\star$, on a $z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z \equiv \arg z' \ [2\pi] \end{cases}$

– Si $z \in \mathbb{C}^\star$, alors :
◇ $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0 \ [\pi]$,
◇ $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$.

Déterminer la forme trigonométrique d'un complexe

Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on pourra commencer par mettre en facteur son module, puis rechercher son argument.

Exemple. Déterminons la forme trigonométrique de $z = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

On a $|z| = 2\sqrt{2}$, et z se récrit $z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Remarque. On ne reconnaît pas toujours la forme trigonométrique d'un nombre complexe de module 1 dans la démarche ci-dessus. On peut néanmoins toujours exprimer l'argument en ayant recours à la fonction arctan. Le résultat ci-dessous permet d'y parvenir.

Théorème

Soit z un complexe de forme algébrique $z = a + ib$ avec $a \neq 0$, et de forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On a :

$$\tan\theta = \frac{b}{a}.$$

Remarques.

- Avec les notations du résultats ci-dessus, si $a > 0$: on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\theta = \arctan \theta$. Sinon, on utilise la relation $\tan(\theta+\pi) = \frac{b}{a}$ ou $\tan(\theta-\pi) = \frac{b}{a}$ pour déterminer θ.
- De manière similaire, on peut exprimer θ en ayant recours à la fonction arccos ou arcsin.

Exemple. Cherchons l'argument principal θ de $z = -2 + \mathrm{i}$.

On a $\tan\theta = -\frac{1}{2}$. D'autre part, on sait que $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, donc $\theta - \pi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Ainsi, comme $\tan(\theta-\pi) = -\frac{1}{2}$, on a $\theta - \pi = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$, et $\theta = \pi - \arctan\frac{1}{2}$.

Théorème - Propriétés des arguments

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^\star$. On a

i. $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$.

ii. $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$.

iii. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z\ [2\pi]$.

iv. $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z\ [2\pi]$.

Démonstration.

i. On a $zz' = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}|z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z'} = |zz'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z + \arg z')}$, donc $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$.

ii. On a $\frac{z}{z'} = \frac{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}}{|z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z'}} = \left|\frac{z}{z'}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z - \arg z')}$, donc $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$.

iii. On a $\bar{z} = |z|\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}} = |z|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg z}$, donc $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z\ [2\pi]$.

iv. On a $-z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + \arg z)}$, donc $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z\ [2\pi]$. □

Interprétation géométrique.

- Si M est le point du plan d'affixe $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, alors $OM = r$ et $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont d'affixes respectives $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta' - \theta\ [2\pi]$. Autrement dit,
$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg z' - \arg z\ [2\pi] \equiv \arg\frac{z'}{z}\ [2\pi].$$
- Si A, B, C sont trois points distincts du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, alors
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A)\ [2\pi] \equiv \arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\ [2\pi].$$

Ainsi, pour connaître l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on peut se ramener à une recherche d'argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. On déduit alors le résultat suivant.

Théorème

Soient A, B, C sont trois points distincts du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

- Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Démonstration. On note $w = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

- Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$. D'après ce qui précède, ceci se récrit $\arg w \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire $w \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, c'est-à-dire $\arg w \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ou encore $w \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. □

3. Techniques de calcul

a. Linéarisation

Il arrive qu'on souhaite transformer une expression faisant apparaître des puissances de $\cos x$ et $\sin x$ en une combinaison linéaire de termes de la forme $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$. On dit qu'on *linéarise* l'expression.

Linéarisation. Dans la pratique, on utilise la formule d'Euler, puis celle du binôme de Newton. On regroupe les termes et on utilise à nouveau la formule d'Euler pour conclure.

Exemple. Linéarisons $(\cos x)^3$:

$$\cos^3 x \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 \;=\; \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{8} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}+3\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)$$

donc $\cos^3 x \;=\; \frac{1}{4}\left(\cos(3x)+3\cos x\right)$, à nouveau par la formule d'Euler.

Remarque. Ceci permet de trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$: on peut choisir la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(3x)}{3}+3\sin x\right)$.
Plus généralement, cette technique permet de trouver une primitive de toute fonction de la forme $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$, où $p, q \in \mathbb{N}$.

b. Délinéarisation

Il arrive qu'on ait besoin de faire l'opération inverse : écrire une expression faisant intervenir des termes de la forme $\cos(px)$ ou $\sin(qx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

Linéarisation. Dans la pratique, on utilise la formule de Moivre, puis celle binôme.

Exemple. Délinéarisons $\sin(3x)$: on a $\sin(3x) \;=\; \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) \;=\; \mathfrak{Im}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\right) \;=\; \mathfrak{Im}\left((\cos x+\mathrm{i}\sin x)^3\right)$. Or

$$\begin{aligned}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^3 &= \cos^3 x+3\mathrm{i}\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-\mathrm{i}\sin^3 x\\ &= (\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x)\;+\;\mathrm{i}\,(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x).\end{aligned}$$

donc $\sin(3x)=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$, ou $\sin(3x)=\sin x\,(4\cos^2 x-1)$, du fait que $\sin^2 x=1-\cos^2 x$.
On a par ailleurs aussi trouvé que $\cos(3x) \;=\; \cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$.

c. Angle moitié

Il est très souvent utile de savoir écrire sous forme trigonométrique une expression de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, ou encore $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. Pour ce faire, on a recours à la technique dite de *l'angle moitié*.

Factorisation par l'angle moitié. On factorise l'expression $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$, de telle sorte qu'on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}\right) \;=\; 2\cos\frac{x-y}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}},\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}\right) \;=\; 2\mathrm{i}\sin\frac{x-y}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}.\end{aligned}$$

Remarques.

- Notons qu'on n'obtient pas toujours la forme trigonométrique directement, mais il est aisé de l'en déduire.
- Très souvent, on utilise ce procédé pour simplifier des expressions de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1$, on est alors amené à factoriser par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$.

L'exemple suivant faire partie des résultats qu'il faut absolument savoir retrouver, et dont les techniques de calcul doivent pouvoir être réutilisées dans des cas similaires.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Démonstration. En effet, on a $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$, or

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

car on a reconnu une somme géométrique, et comme $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, $e^{ix} \neq 1$. On a ensuite utilisé la technique de l'angle moitié, puis la formule d'Euler. Finalement, on obtient le résultat en prenant la partie réelle. On obtient la deuxième somme à l'aide du calcul ci-dessus, en prenant cette fois la partie imaginaire. □

Remarque. On retrouve aisément les formules de factorisation rencontrées dans le chapitre TRIGONOMÉTRIE. Par exemple, si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos x + \cos y = \mathfrak{Re}(e^{ix} + e^{iy}) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)\right) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\frac{x+y}{2}} \times 2\cos\frac{x-y}{2}\right) = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Les autres formules se retrouvent d'une manière analogue.

d. Transformation d'expressions de la forme $a\cos x + b\sin x$

Il est parfois utile de récrire les expressions de la forme $a\cos x + b\sin x$ sous la forme $A\cos(x+\theta)$ ou encore $A\sin(x+\varphi)$.

Écriture de $a\cos x + b\sin x$ sous la forme $A\cos(x+\theta)$ ou $A\sin(x+\theta)$.

– Pour parvenir à la forme $A\cos(x+\theta)$, on cherche $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ tel que $a\cos x + b\sin x = \mathfrak{Re}((\alpha+i\beta)e^{ix})$. Ainsi, si $z = Ae^{i\theta}$, on a $a\cos x + b\sin x = \mathfrak{Re}(Ae^{i(x+\theta)}) = A\cos(x+\theta)$.

– Pour parvenir à la forme $A\sin(x+\theta)$, on cherche $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ tel que $a\cos x + b\sin x = \mathfrak{Im}((\alpha+i\beta)e^{ix})$. Ainsi, si $z = Ae^{i\theta}$, on a $a\cos x + b\sin x = \mathfrak{Im}(Ae^{i(x+\theta)}) = A\sin(x+\theta)$.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x$ sous la forme $A\cos(x+\theta)$.

On a $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = \mathfrak{Re}\left((\sqrt{6} + i\sqrt{2})(\cos x + i\sin x)\right)$. On écrit $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ sous forme trigonométrique : on a $|z| = 2\sqrt{2}$, et $z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc

$$\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = \mathfrak{Re}\left(2\sqrt{2}e^{i\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Exponentielle complexe

Définition - Exponentielle complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, où $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle *exponentielle* de z, et on note e^z le complexe $e^a\, e^{ib}$.

Remarques.

– Il n'y a pas d'ambiguïté dans cette définition : si $z \in \mathbb{R}$ ou si $z \in i\mathbb{R}$, on retrouve bien la définition de l'exponentielle réelle, ou celle de l'exponentielle d'un imaginaire pur.
– Si $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}\, z}$, et $\arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}\, z\ [2\pi]$.
– Si $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = e^{z+2ik\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème - Propriétés de l'exponentielle complexe

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $e^{z+z'} = e^z\, e^{z'}$, et $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Démonstration. On écrit z et z' sous forme algébrique : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a alors

- $\mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{a'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b'} = \mathrm{e}^{a+a'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+b')} = \mathrm{e}^{z+z'}$.
- $\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b} = \frac{1}{\mathrm{e}^{a}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{z}}$. □

⚠ On prendra garde au fait que, contrairement au cas réel, il existe une infinité de logarithmes d'un complexe non nul donné, en d'autres termes, l'équation $\mathrm{e}^{z} = u$, où $u \in \mathbb{C}^\star$ possède une infinité de solutions.

En effet, si on écrit $u = |u|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z = a + ib$, alors l'équation se récrit $\begin{cases} \mathrm{e}^{a} = |u| \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{cases}$, *i.e.* $\begin{cases} a = \ln|u| \\ b \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$.
Finalement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z = \ln|u| + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$ est solution.

5. Racines de l'unité

Définition - Racines *n*-èmes de l'unité, racines *n*-èmes d'un complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle racine n-ème de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ème de l'unité.
Plus généralement, on appelle racine n-ème d'un complexe a tout complexe z tel que $z^n = a$.

Théorème - Racines *n*-èmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments, et

$$\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \{\omega^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}, \quad \text{où } \omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}.$$

Cas $n = 3$: le complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ est noté j, de sorte que $\mathbb{U}_3 = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$.

Démonstration. On note $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a alors $z^n = |z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, et

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z|^n = 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ n\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$

Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$, donc les complexes $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$ sont tous distincts. Si $k \notin [\![0, n-1]\!]$, $\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}$ est toujours congru à un des angles précédents modulo 2π. Il y a donc bien exactement n solutions à l'équation $z^n = 1$. □

Exemples. $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$, $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

Remarque. Si $n \geqslant 3$, les points du plan d'affixe dans $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.
Cas où $n = 3$: on obtient les points d'affixe 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$, sommets d'un triangle équilatéral.

Théorème - Somme des racines de l'unité

Si $n \in \mathbb{N}^\star$, la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0,$$

où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. En particulier, $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

Démonstration. Comme $\omega \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0, \quad \text{car } \omega^n = 1.$$ □

Remarque. On peut aussi calculer le produit des racines n-ème de l'unité : si $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(n-1)} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Théorème - Racines n-èmes d'un complexe

Si $a \in \mathbb{C}^\star$ a pour forme trigonométrique $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, alors a possède exactement n racines n-èmes, données par
$$\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, \quad \text{où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration. On remarque que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left(\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}\right)^n$, d'où
$$z^n = a \iff z^n = \left(\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}\right)^n \iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}}\right)^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$
□

Exemple. Déterminons les racines cubiques de $a = 8(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6})$.

On commence par écrire le complexe $\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6}$ sous forme trigonométrique en le factorisant par son module : $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6} = \sqrt{8}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, $z = 8^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Comme $\sqrt[3]{8^{\frac{3}{2}}} = 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, les racines cubiques de z sont données par
$$2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}, \quad 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}, \quad 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}},$$
c'est-à-dire $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{9}}$, $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{9}}$, $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{9}}$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que les solutions de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ sont toutes réelles.

Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$ solution de l'équation. On a clairement $z \neq \mathrm{i}$, et on a donc
$$\frac{(z+\mathrm{i})^n}{(z-\mathrm{i})^n} = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1.$$
On en déduit que $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{U}_n$, donc il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$, donc $z\big(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} - 1\big) = \mathrm{i}\big(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} + 1\big)$. On remarque que $k \neq 0$, donc on a
$$z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} - 1} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)} = \mathrm{i}\,\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \in \mathbb{R}.$$