Chapitre 5

Trigonométrie

I Fonctions circulaires

Notation. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x \equiv y\ [\alpha]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - x = k\alpha$.

1. Définitions

Rappel.
On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note M_x l'unique point du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré en O) tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_x}) \equiv x\ [2\pi]$. On note alors

$$\begin{aligned} \cos x &: \text{ l'abscisse de } M_x, \\ \sin x &: \text{ l'ordonnée de } M_x. \end{aligned}$$

On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ les fonction sinus et cosinus par respectivement $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, on définit par ailleurs

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0

Valeurs remarquables

Théorème - Propriétés des fonctions sinus et cosinus

i. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
ii. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.
iii. La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.
iv. Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
v. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Formules de trigonométrie

Les formules suivante, dites d'addition, doivent être connues par cœur. Elles serviront souvent de base pour retrouver les autres formules qui suivront.

Théorème - Formules d'addition

Soient a, b deux réels, si les expressions suivantes ont un sens, alors :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a, & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a, \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, & \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}. \end{aligned}$$

On déduit directement les formules de duplication ci-dessous, qui s'avèrent souvent très utiles.

Corollaire - Formules de duplication

Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1,$$

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a,$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}, \quad \text{si } a \notin \left\{\tfrac{\pi}{4} + k\tfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Remarque. On retiendra également l'écriture $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Corollaire - Formules de linéarisation

Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos a\,\cos b = \tfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right),$$
$$\sin a\,\sin b = \tfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right),$$
$$\sin a\,\cos b = \tfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right).$$

Ces formules ne sont pas à apprendre par cœur, mais à bien comprendre, et à savoir retrouver de tête à partir des formules d'addition. Les variantes suivantes s'avèrent parfois bien utiles également.

Corollaire - Formules de factorisation

Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

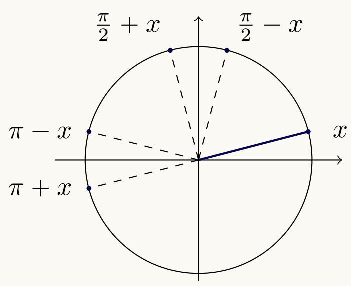
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{y-x}{2},$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}.$$

Les formules ci-dessous doivent pouvoir être retrouvées très rapidement à partir du cercle trigonométrique.

Théorème - Symétrie

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi+x) = -\cos x, \qquad \cos(\pi-x) = -\cos x,$$
$$\sin(\pi+x) = -\sin x, \qquad \sin(\pi-x) = \sin(x),$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x, \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x,$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos x, \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x.$$



Démonstration. Ces formules peuvent être montrées directement en utilisant les formules d'addition des fonctions cos et sin. □

Théorème - Résolution d'équations trigonométriques

Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos x = \cos y \quad \text{ssi} \quad x \equiv y\ [2\pi] \ \text{ ou } \ x \equiv -y\ [2\pi],$$
$$\sin x = \sin y \quad \text{ssi} \quad x \equiv y\ [2\pi] \ \text{ ou } \ x \equiv \pi - y\ [2\pi].$$

Remarque. Pour résoudre une équation de la forme $\cos x = \alpha$, ou $\sin x = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On commence alors par essayer d'écrire α sous la forme $\cos y$ ou $\sin y$.

Exemple. Résolution de l'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

Solution. L'équation se récrit $\sin(2x) = \sin\frac{\pi}{3}$, or

$$\sin(2x) = \sin\frac{\pi}{3} \quad\Leftrightarrow\quad 2x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \quad\Leftrightarrow\quad x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi].$$

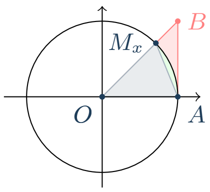
Finalement, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $\frac{\pi}{3} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$.

3. Étude des fonctions circulaires

Théorème - Limites usuelles

On a
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Une comparaison de l'aire du triangle OAM_x, l'aire du secteur angulaire entre A et M_x et l'aire du triangle OAB donne :



$$\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2}, \qquad \text{donc} \qquad \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1,$$

car $x > 0$ et $\cos x > 0$. Par conséquent, on a $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ par encadrement.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, on a aussi $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$, donc $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Si $x \in \mathbb{R}^\star$, on a :
$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x+1)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)} = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos x + 1} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

Remarque. Ces résultats expriment que, au voisinage de 0,
- $\diamond$ $\sin x$ “ressemble” à x,
- $\diamond$ $\cos x$ “ressemble” à $1 - \frac{x^2}{2}$.

Théorème - Dérivées des fonctions sinus et cosinus

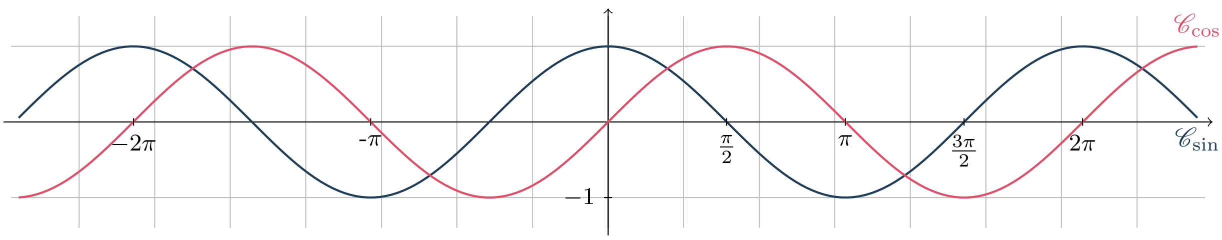
Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Démonstration. Si $x \in \mathbb{R}^\star$, on a
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h\cos x}{h}\\ &= h\,\sin x\,\frac{\cos h - 1}{h^2} + \frac{\sin h}{h}\cos x \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x\end{aligned}$$

car $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\frac{\cos h - 1}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{2}$. Ainsi, sin est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^\star$, et $\sin'(x) = \cos x$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction composée, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$. $\square$

Graphe des fonctions cosinus et sinus On déduit alors du signe de cos et sin les variations de sin et cos, et on obtient les graphes suivants.



Remarques.

- Comme $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient la courbe de sin à partir de celle de cos par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.
- Comme $\sin x = \sin(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la courbe de sin a une symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{2}$.

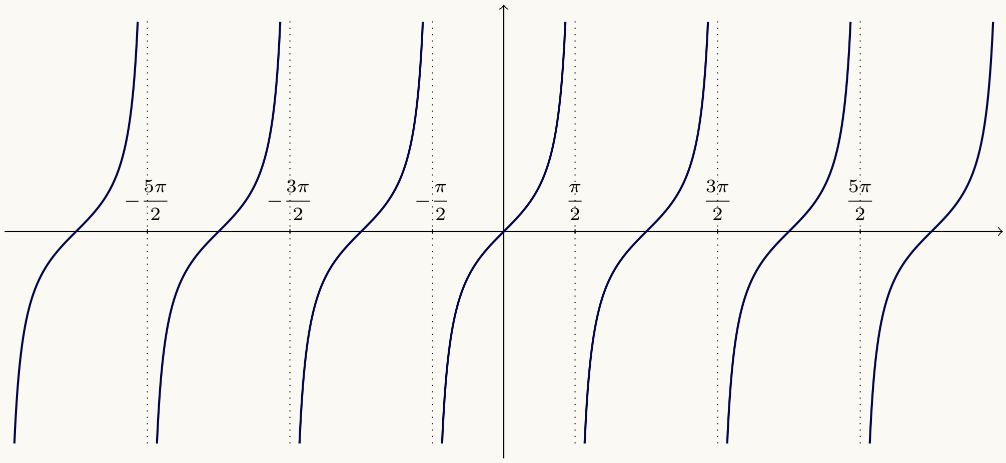
Théorème - Propriétés de la fonction tangente

– La fonction tan est impaire, π-périodique et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, et

$$\tan' \;=\; \frac{1}{\cos^2} \;=\; 1+\tan^2.$$

– *Limites :* $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} = +\infty.$

– *Graphe :*



– *Équations trigonométriques :* si $x,y\in\mathbb{R}$, alors $\tan x = \tan y \iff x\equiv y\ [\pi]$.

Démonstration.

– La fonction tan est impaire sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ car sin est impaire et cos est impaire sur $\mathscr{D}$.
– Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x\in\mathscr{D} \iff x+\pi\in\mathscr{D}$, et pour tout $x\in\mathscr{D}$,

$$\tan(x+\pi) \;=\; \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \;=\; \frac{-\sin x}{-\cos x} \;=\; \tan x.$$

– Les limites se déduisent des limites $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x = 0^+$.
– On peut restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par π-périodicité et imparité. Sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, les fonctions sin et cos sont dérivables et cos ne s'annule pas. Par conséquent, la fonction tan est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, et on a

$$\tan' \;=\; \frac{\sin'\cos-\cos'\sin}{\cos^2} \;=\; \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} \;=\; \frac{1}{\cos^2} \;=\; 1+\tan^2.$$

Ceci entraîne que tan est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Comme par ailleurs on a $\tan'(0)=1$, on peut en déduire le graphe de tan par imparité et π-périodicité.
– On a $\tan x=\tan y \iff \sin x\cos y = \sin y\cos x \iff \sin x\cos y-\sin y\cos x = 0 \iff \sin(x-y)=0$. Par conséquent, $\tan x = \tan y \iff x-y\equiv 0\ [\pi] \iff x\equiv y[\pi]$. □

Théorème - Paramétrisation rationnelle du cercle trigonométrique

Si $x\not\equiv\pi\ [2\pi]$ et $t=\tan\frac{x}{2}$, alors

$$\cos x \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \;=\; \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{si de plus } x\not\equiv\tfrac{\pi}{2}\ [\pi], \quad \tan x \;=\; \frac{2t}{1-t^2}.$$

Démonstration. On a :

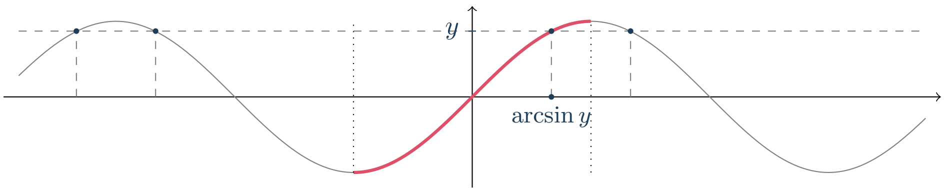
$$\cos x \;=\; \cos\left(2\,\frac{x}{2}\right) \;=\; \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} \;=\; \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) \;=\; \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \text{car} \quad \cos^2\frac{x}{2} \;=\; \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

$$\sin x \;=\; \sin\left(2\,\frac{x}{2}\right) \;=\; 2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2} \;=\; 2\tan\frac{x}{2}\,\cos^2\frac{x}{2} \;=\; \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

On en déduit directement la formule de $\tan x$, qui peut par ailleurs se déduire de la formule de duplication. □

4. Fonctions circulaires réciproques

On sait que la fonction sin n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$: si $y \in [-1,1]$, l'équation $y = \sin x$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$. En revanche, cette équation n'admet qu'une solution sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ceci va fournir une réciproque de la fonction sin *restreinte à l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nous ferons une construction similaire pour les fonctions cos et tan.



On sait que :
- la fonction sin est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- la fonction cos est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$,
- la fonction tan est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

Le théorème de la bijection entraîne alors que :

- la fonction sin est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$, on note arcsin sa bijection réciproque,
- la fonction cos est bijective de $[0,\pi]$ sur $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$, on note arccos sa bijection réciproque.
- la fonction tan est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty,+\infty[$, on note arctan sa bijection réciproque.

Ainsi,
$$\arcsin\ :\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arccos\ :\ [-1,1] \to [0,\pi], \qquad \arctan\ :\ \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

⚠ Les fonctions arcsin, arccos et arctan ne sont pas les bijections réciproques des fonctions sin, cos et tan, dont on sait bien sûr qu'elles ne sont pas bijectives sur leur ensemble de définition.

Remarque. On a :
$$\begin{array}{llll} \forall x \in [-1,1], & \sin(\arcsin x) = x, & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arcsin(\sin x) = x, \\ \forall x \in [-1,1], & \cos(\arccos x) = x, & \forall x \in [0,\pi], & \arccos(\cos x) = x, \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\arctan x) = x, & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, & \arctan(\tan x) = x. \end{array}$$

⚠ En revanche on n'a pas en général $\arcsin(\sin x) = x$. Par exemple, $\arcsin(\sin \pi) = 0$. On retiendra les équivalences suivantes.

$$x = \arcsin a \iff \begin{cases} \sin x = a \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad x = \arccos a \iff \begin{cases} \cos x = a \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \qquad x = \arctan a \iff \begin{cases} \tan x = a \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Il convient de bien connaître les valeurs remarquables ci-dessous, qui proviennent directement des valeurs remarquables pour les fonctions circulaires, et qu'on peut retrouver aisément à l'aide du cercle trigonométrique.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Exemple. Montrons que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

On note $\theta = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in [0,1[$, on a $\arctan\frac{1}{2}$, $\arctan\frac{1}{3} \in [0, \frac{\pi}{4}[$, donc $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et

$$\tan\theta = \frac{\tan(\arctan\frac{1}{2}) + \tan(\arctan\frac{1}{3})}{1 - \tan(\arctan\frac{1}{2})\tan(\arctan\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$. Comme $\theta \in [0, \pi[$, on en déduit que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Théorème

Soit $x \in [-1,1]$. On a

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Démonstration. On a $\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$. En composant par la fonction racine, on obtient que $|\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-x^2}$. Comme $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$, ce qui conclut. La deuxième égalité est analogue. $\square$

Exemples.

– Pour tout $x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

– Pour tout $x \in [-1,1]\backslash\{0\}$, $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Théorème - Étude de la fonction *arcsin*

La fonction arcsin est strictement croissante, impaire sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La restriction de la fonction sin à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ étant strictement croissante, sa bijection réciproque arcsin l'est aussi. Comme la dérivée de sin ne s'annule pas sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque entraîne que arcsin est dérivable sur $\sin(I) =]-1,1[$, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Montrons l'imparité : si $x \in [-1,1]$, on note $a = \arcsin(x)$, on a alors $\sin a = x$, donc $\sin(-a) = -x$. Comme $-a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a alors $-a = \arcsin(-x)$, soit $-\arcsin x = \arcsin(-x)$. $\square$

Théorème - Étude de la fonction *arccos*

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle pour la fonction arcsin. $\square$

Remarque. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

En effet, si on note $a = \arccos x$, on a $\cos(\pi - a) = -\cos a = -x$. Ainsi, comme $\pi - a \in [0,\pi]$, par définition de arccos, on a $\pi - a = \arccos(-x)$, c'est-à-dire $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Théorème

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction $f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée nulle. Par conséquent, la fonction f est constante sur $[-1,1]$. Comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient le résultat. $\square$

Remarque. Voici une preuve alternative du résultat ci-dessus, qui n'utilise pas les dérivées des fonctions circulaires réciproques.

On note $a = \arccos x$. On a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, ce qui entraîne que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = x$. Comme $\frac{\pi}{2} - a$ appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que $\frac{\pi}{2} - a = \arcsin x$, donc $\frac{\pi}{2} = a + \arcsin x = \arccos x + \arcsin x$.

Théorème - Étude de la fonction *arctan*

La fonction arctan est strictement croissante, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

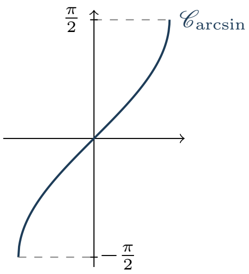
Démonstration. La stricte croissance provient de la stricte croissance de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La dérivée de tan, qui est $1 + \tan^2$, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

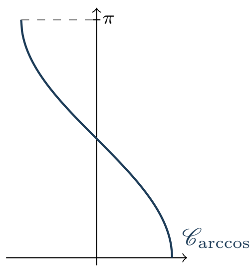
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \square$$

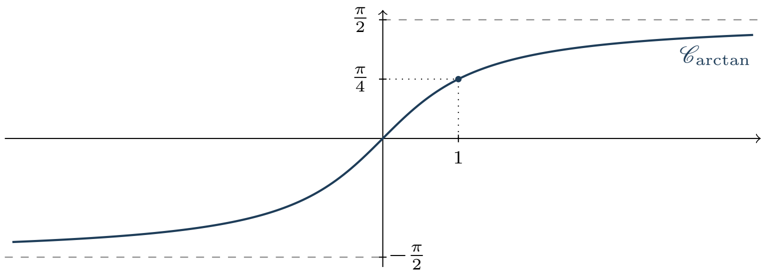
L'imparité s'obtient comme pour la fonction arcsin.

Représentations graphiques

Les propriétés des fonctions circulaires réciproques détaillées ci-dessus permettent d'obtenir les représentations graphiques suivantes.







Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Comme $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est impaire sur $\mathbb{R}^\star$, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R}_-^\star, \ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. La fonction $g : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Ainsi, la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Comme on constate que $g(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$, on obtient bien le résultat. $\square$

Remarque. Voici une preuve alternative du résultat ci-dessus, qui n'utilise pas la dérivée de la fonction arctan.

On note $a = \arctan x$. On a alors

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - a)}{\cos(\frac{\pi}{2} - a)} = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\tan a} = \frac{1}{x}.$$

Or comme $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\frac{\pi}{2} - a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\frac{\pi}{2} - a = \arctan \frac{1}{x}$, ce qui entraîne $\frac{\pi}{2} = a + \arctan \frac{1}{x}$.