Chapitre 4

Rappels et compléments sur les fonctions réelles

Dans tout le chapitre, E et F désignent des parties de $\mathbb{R}$.

I Généralités sur les fonctions réelles

1. Définitions

Définition - Fonction

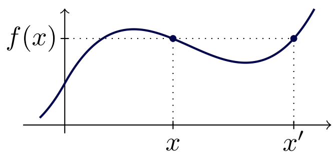
Une fonction réelle f définie sur E est un procédé qui associe à chaque élément $x \in E$ un unique réel, noté $f(x)$. On note

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On note $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur E.

– Si $x \in E$, $y \in \mathbb{R}$ et $y = f(x)$, on dit que y est *l'image* de x par f et x est *un antécédent* de y par f.
– Il arrive qu'une fonction réelle f soit introduite sans préciser d'ensemble de départ, on appelle alors *ensemble de définition* de f l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.

Remarque. Il faut bien noter qu'un élément x de E ne peut avoir qu'une seule image (sinon la fonction f est définie de manière ambigüe).
En revanche, un élément y de $\mathbb{R}$ peut avoir plusieurs antécédents.



Définition - Ensemble image

Si $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, on appelle *ensemble image* de f, ou simplement *image de* f l'ensemble $f(E)$ des images des éléments de E par f :

$$f(E) = \{f(x),\ x \in E\}.$$

On dit que f est *à valeurs dans* une partie F de $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$, autrement dit $f(E) \subset F$.
Plus généralement, si $A \subset E$, on note $f(A)$ l'ensemble $\{f(x),\ x \in A\}$, qu'on appelle *image de A par f*.

⚠ Attention à ces notations qui se ressemblent : si x est un *élément* de E, alors $f(x)$ est un réel, si A est un *sous-ensemble* de E, alors $f(A)$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Exemples. – L'ensemble image de la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}_+^\star$: $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$.
– L'ensemble image de la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ est $\mathbb{R}$: $\ln(\mathbb{R}_+^\star) = \mathbb{R}$.

Remarque. Si $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ vérifie $f(E) \subset F$, on dit parfois que f est *à valeurs dans* F. En d'autres termes, toutes les images de f appartiennent à F.

Définition - Graphe

Si $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, on appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\mathscr{G}_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\}.$$

Dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère, on appelle *courbe représentative* de f l'ensemble $\mathscr{C}_f$ des points de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont de la forme $(x, f(x))$ avec $x \in E$. On dit que $y = f(x)$ est une équation de $\mathscr{C}_f$.

Remarque. Dans la pratique, on ne fera pas la différence entre le graphe d'une fonction et sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

2. Opérations sur les fonctions

Définition - Opérations sur les fonctions

Soient $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(F,\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit les fonctions :

- **Somme :** $f+g \ : \ x \mapsto \ f(x)+g(x)$ définie sur $E \cap F$,
- **Multiplication par un réel :** $\lambda f \ : \ x \ \mapsto \ \lambda f(x)$ définie sur E,
- **Produit :** $fg \ : \ x \mapsto \ f(x)\,g(x)$, définie sur $E \cap F$,
- **Composition :** si $f(E) \subset F$ (c'est-à-dire $\forall x \in E,\ f(x) \in F$), alors la *composée* de f par g est définie par

$$g \circ f \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque. ⚠ En général, même lorsqu'elles existent toutes les deux, $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas les mêmes fonctions.

Inverse et quotient Soient $f, g \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.

- L'inverse de f est la composée de f par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\{x \in E,\ f(x) \neq 0\}$, et notée $\frac{1}{f}$.
- Le quotient de f par g est le produit de f et $\frac{1}{g}$, défini sur $\{x \in E,\ g(x) \neq 0\}$, et noté $\frac{f}{g}$.

Théorème

Soient $f, g \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Si $g : x \mapsto f(x+a)$, alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- Si $g : x \mapsto f(x)+b$, alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $b\vec{\jmath}$.
- Si $g : x \mapsto f(a-x)$, alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ par symétrie d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$.
- Si $g : x \mapsto f(ax)$ et $a \neq 0$, alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ par dilatation de direction l'axe des abscisses et de rapport $\frac{1}{a}$.
- Si $g : x \mapsto bf(x)$, alors $\mathscr{C}_g$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ par dilatation de direction l'axe des ordonnées et de rapport b.

Démonstration. Les premier et troisième points sont traités à titre d'exemple, les autres sont laissés en exercice.

- On a $\mathscr{G}_g = \{(x, g(x)),\ x \in \mathbb{R}\} = \{(x, f(x+a)),\ x \in \mathbb{R}\} = \{(y-a, f(y)),\ y \in \mathbb{R}\} = \{(y, f(y)) - a(1,0),\ y \in \mathbb{R}\}$.

  Ainsi, les points de la courbe $\mathscr{C}_g$ sont obtenus à partir des points de $\mathscr{C}_f$ auxquels on applique une translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
- On a $\mathscr{G}_g = \{(x, f(a-x)),\ x \in \mathbb{R}\} = \{(y-a, f(y)),\ y \in \mathbb{R}\}$, or le symétrique du point de coordonnées $(y, f(y))$ par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$ est le point de coordonnées $(y-a, f(y))$. □

On déduit directement du troisième point le résultat suivant.

Corollaire

Soient $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $a - x \in E$.

Si pour tout $x \in E$, on a $f(a-x) = f(x)$, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$.

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(\pi - x) = \sin x$. On en déduit alors que la courbe de la fonction sin est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Parité, périodicité

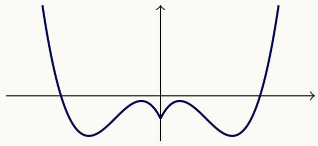
Définition - Parité, imparité

Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in E$, $-x \in E$.

◇ La fonction f est dite *paire* si

$$\forall x \in E,\ f(-x) = f(x).$$

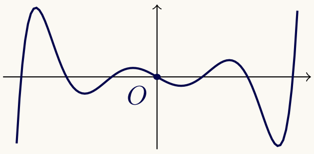
Graphiquement, la courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



◇ La fonction f est dite *impaire* si

$$\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x).$$

Graphiquement, la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point O, origine du repère.



Remarque. Lorsqu'une fonction f définie sur E est paire ou impaire, on pourra l'étudier sur $E \cap \mathbb{R}_+$ puis en déduire l'étude de f sur E entier par symétrie.

Exemples.
- Les fonctions $x \mapsto |x|$, cos, $x \mapsto x^n$ où n est un entier pair sont paires,
- Les fonctions sin, $x \mapsto x^n$ où n est un entier impair sont impaires.

Définition - Fonction périodique

Soient $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^\star$. On suppose que pour tout $x \in E$, $x + T \in E$ et $x - T \in E$. On dit que f est T-périodique si

$$\forall x \in E,\quad f(x+T) = f(x).$$

On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que f est T-périodique.

Exemple. Les fonctions cos et sin, définies sur $\mathbb{R}$ sont 2π-périodiques. La fonction tan définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est π-périodique.

Remarque. Si $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ est T-périodique,

- pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x + nT) = f(x)$,
- la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est invariante par translation de vecteur $nT\,\vec{\imath}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
- on pourra se contenter d'étudier la fonction f sur $E \cap [a, a+T[$, où $a \in E$.

La fonction f est alors également nT-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on ne parle donc pas de *la* période mais d'*une* période de f. On prendra toutefois l'habitude de rechercher la plus petite période possible.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \sin(3x)$ est 2π-périodique, mais elle est aussi $\frac{2\pi}{3}$-périodique.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x)$, c'est-à-dire $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$.

4. Fonction majorée, minorée, bornée

Définition - Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction réelle définie sur E.

⋆ On dit que f est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) \leqslant M$.

⋆ On dit que f est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) \geqslant m$.

⋆ On dit que f est *bornée* si f est minorée et majorée.

Remarques.

- La fonction f est majorée sur E (*resp. minorée, resp. bornée*) si et seulement si son ensemble image $f(E)$ est majoré (*resp. minoré, resp. borné*).

– La fonction f est bornée sur E si et seulement si $|f|$ est majorée *i.e.*

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ |f(x)| \leqslant M.$$

En effet, $f(E)$ est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in f(E)$, $|y| \leqslant M$, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

Exemples.
– La fonction exp est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
– La fonction cos est bornée.

Définition - Extrema

Soient $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ et $x_0 \in E$. On dit que f admet en x_0 :

– un *minimum* si pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, on note alors $f(x_0) = \min_{x\in E} f(x)$,
– un *maximum* si pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant f(x_0)$, on note alors $f(x_0) = \max_{x\in E} f(x)$,
– un *extremum* si f admet un minimum ou un maximum en x_0.

⚠ Une fonction, même bornée, n'admet pas toujours de minimum ou de maximum. Par exemple, la fonction exp est bornée sur $\mathbb{R}_-$, mais n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}_-$.

5. Monotonie

Définition - Fonctions monotones, strictement monotones

Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

⋆ On dit que
◇ f est *constante* sur E si $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) = a$,
◇ f est *croissante* sur E si $\forall x, y \in E,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
◇ f est *décroissante* sur E si $\forall x, y \in E,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
◇ f est *strictement croissante* sur E si $\forall x, y \in E,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
◇ f est *strictement décroissante* sur E si $\forall x, y \in E,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

⋆ On dit que f est *monotone* sur E si f est croissante ou décroissante sur E tout entier. On parle de *stricte monotonie* lorsque la croissance ou la décroissance est stricte.

Remarque. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est à la fois croissante et décroissante, mais n'est pas strictement monotone.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $x < y$. On a alors $y^2 - x^2 = (y - x)(x + x) > 0$ car $y - x > 0$ et $0 \leqslant x < y$ donc $x + y > 0$. Ainsi, $x^2 < y^2$.

Théorème

Si f est strictement croissante sur E et $x, y \in E$, on a l'équivalence $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$. Si f est strictement décroissante, on a $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(y)$.

Démonstration. Supposons que f est croissante sur E, et fixons $x, y \in E$. L'implication $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ est donnée par la définition de la croissance de f. La seconde implication : $f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow x \leqslant y$ n'est autre que la contraposée de l'implication $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, qui est vraie d'après la stricte croissance de f. □

Théorème - Monotonie et opérations

– **Somme.** Soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$. Si f et g ont même monotonie, alors $f + g$ a la même monotonie que f et g. Si de plus l'une des deux est strictement monotone, alors $f + g$ est strictement monotone.
– **Produit.** Soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$. Si f et g ont même monotonie et sont positives, alors fg a la même monotonie que f et g.
– **Composition.** Soient $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(F, \mathbb{R})$ avec $f(E) \subset F$.

i. Si f et g sont de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante,
ii. Si f et g sont de monotonies opposées, alors $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration. Montrons un des cas du résultat de composition, tous les autres sont laissés en exercice. Supposons que f et g sont décroissantes, et montrons que $g \circ f$ est croissante.

Soient $x, y \in E$ tels que $x \leqslant y$. Par décroissance de f, on a alors $f(x) \geqslant f(y)$. Par décroissance de g désormais, ceci entraîne que $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(y)$. On a donc bien montré que $g \circ f$ est croissante. □

Exemples. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^3}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \ln x + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Remarque. L'utilisation des résultats du théorème ci-dessus permet parfois d'obtenir la monotonie d'une fonction sans avoir besoin de la dériver.

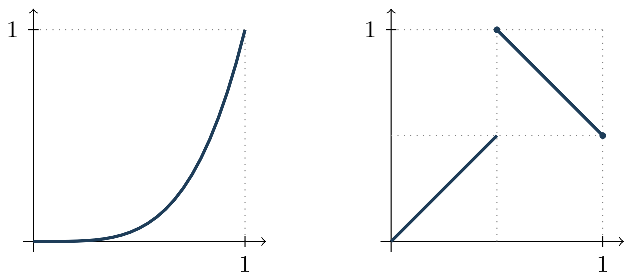
6. Bijectivité

Définition - Bijection

On dit que $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ est *bijective* de E sur F (ou est une *bijection* de E sur F) si tout élément de F admet un unique antécédent dans E par f :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ \ f(x) = y.$$

En d'autres termes, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x, admet une unique solution dans E.



Graphes de fonctions bijectives de $[0, 1]$ *sur* $[0, 1]$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 2x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En effet, si $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = 2x$ admet une unique solution, donnée par $x = \frac{y}{2}$.

Définition - Réciproque

Si $f \in \mathscr{F}(E, F)$, on appelle *réciproque* de f toute fonction $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que :

$$\forall x \in E,\ g(f(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\ f(g(y)) = y.$$

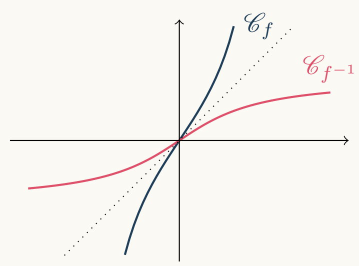
Théorème - Bijection et réciproque

Une fonction f est bijective de E sur F si et seulement si elle admet une fonction réciproque.

Dans ce cas, cette réciproque est unique, et notée f^{-1}. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y).$$

Géométriquement, la courbe représentative de f et celle de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Démonstration.

– Nous montrerons l'équivalence entre le caractère bijectif et l'existence de réciproque dans un cadre plus général ultérieurement.

– Le deuxième point peut être vu en remarquant que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x, y) \in \mathscr{G}_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y, x) \in \mathscr{G}_{f^{-1}}.$$

□

Remarque. Si f est bijective de E sur F, alors f^{-1} est bijective de F sur E, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$.

En effet, si $y \in]1, +\infty[$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y = 1 + \mathrm{e}^{-x} \iff \mathrm{e}^{-x} = y - 1 \iff -x = \ln(y-1) \iff x = \ln \frac{1}{y-1}.$$

Ainsi, l'équation $y = f(x)$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, et f est bijective. Par ailleurs, sa bijection réciproque est donnée par $f^{-1} : x \mapsto \ln \frac{1}{y-1}$.

Théorème - Bijectivité et monotonie

Si $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ est bijective de E sur F et monotone sur E, alors elle est strictement monotone et sa bijection réciproque f^{-1} a la même stricte monotonie.

Démonstration. Si f est croissante sur E et $x, y \in E$ vérifient $x < y$, alors on a déjà $f(x) \leqslant f(y)$ par croissance de f. Comme $f(x) \neq f(y)$ par bijectivité de f, on a donc $f(x) < f(y)$. Ceci assure la stricte croissance de f.

Soient maintenant $x, y \in F$. Si $f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y)$, alors par croissance de f, on a $f(f^{-1}(x)) \geqslant f(f^{-1}(y))$, soit $x \geqslant y$. Par contraposée, on a alors $x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$, ce qui assure que f^{-1} est strictement croissante. □

II Continuité, dérivabilité

Les théorèmes de cette partie seront démontrés ultérieurement, dans les chapitres qui leur seront respectivement consacrés.

1. Continuité

Définition - Fonction continue

Soient $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ et $a \in E$. On dit que f est continue en $a \in E$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.

Si f est continue en tout point de E, on dit que f est continue sur E. L'ensemble des fonctions continues sur E est noté $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$, ou simplement $\mathscr{C}(E)$.

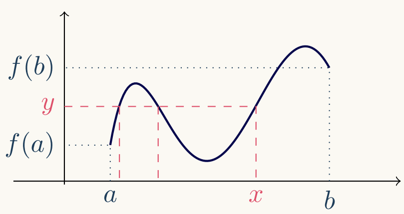
Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = y.$$

Autrement dit, l'image par f de l'intervalle I est un intervalle.



Dans le cas où la fonction considérée est strictement monotone, il y a unicité dans l'énoncé ci-dessus.

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

De plus, la bijection réciproque f^{-1} est continue, strictement monotone sur J, de même monotonie que f.

La monotonie permet d'exprimer facilement l'ensemble image d'un intervalle par f. Voici quelques exemples : soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,

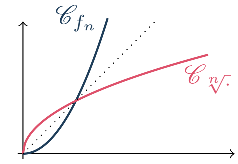
- si f est continue, strictement croissante sur $[a, b]$, alors f est bijective de $[a, b]$ sur $f(I) = [f(a), f(b)]$,
- si f est continue, strictement croissante sur $]a, b]$, alors f est bijective de $]a, b]$ sur $f(I) =]\lim_{a^+} f,\ f(b)]$,
- si f est continue, strictement décroissante sur $]a, b[$, alors f est bijective de $]a, b[$ sur $f(I) =]\lim_{b^-} f,\ \lim_{a^+} f[$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par le théorème de la bijection, elle est donc bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur son ensemble image $\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$.

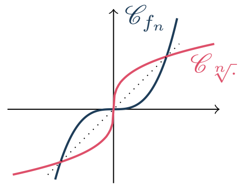
Fonctions racines *n*-ème

- Si $n \in \mathbb{N}$ est pair : la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Par le théorème de la bijection, elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est appelée fonction racine n-ème, et est notée $\sqrt[n]{\cdot}$.

  Dans le cas où $n = 2$, la fonction $\sqrt[2]{\cdot}$ n'est autre que la fonction racine carrée.



- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair : la fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est encore appelée fonction racine n-ème, et est notée $\sqrt[n]{\cdot}$.



2. Dérivabilité

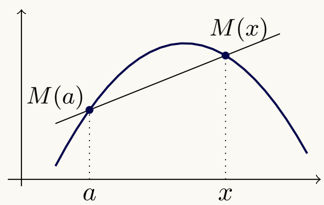
Dans cette partie, E désigne un ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

Définition - Taux d'accroissement

Soit $a \in I$. On appelle *taux d'accroissement de f en a* la fonction $\tau_a : E \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Graphiquement, $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points $M(a)$ et $M(x)$ de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.



Définition - Dérivabilité en un point, sur un ensemble

On dit que f est dérivable en $a \in E$ si son taux d'accroissement en a τ_a admet une limite finie lorsque $x \to a$. Dans ce cas, on note cette limite $f'(a)$, et on l'appelle *nombre dérivé* de f en a.

Si f est dérivable en tout point d'un ensemble E, on dit que f est dérivable sur E, et on appelle *dérivée* de f sur E la fonction $f : x \mapsto f'(x)$ définie sur E. On note $\mathscr{D}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur E.

⚠ La notation $f(x)'$ est proscrite : $f(x)$ est un *nombre réel*, et non pas une fonction. Lorsqu'on voudra faire apparaître la variable de dérivation, on pourra en revanche écrire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ au lieu de f'.

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = 2a$.

   Si $x \in \mathbb{R} \backslash \{a\}$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x + a} = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a$, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a$.
2. La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^\star$, et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

   Si $x \in \mathbb{R} \backslash \{a\}$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \dfrac{a - x}{xa\,(x - a)} = -\dfrac{1}{xa}$, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\dfrac{1}{a^2}$.
3. La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

   Si $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \{a\}$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

   En revanche, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}_+^\star, \text{ on a } \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ donc } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty.$$

Définition - Tangente à $\mathscr{C}_f$ en a

Soit f une fonction dérivable en $a \in I$. La droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée *tangente à la courbe de f en a.*

Remarque. Graphiquement, la tangente à la courbe de f en un point a est la droite de pente $f'(a)$ passant par le point $M(a)$.

Théorème - Dérivabilité et continuité

Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Pour $x \neq a$, on note $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$. On sait alors que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$f(x) - f(a) = (f'(a) + \varepsilon(x))(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc bien $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, et f est continue en a. □

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.

Théorème - Opérations sur les fonctions dérivables

- Si $f, g \in \mathscr{D}(E, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions λf, $f+g$, fg et, si g ne s'annule pas sur E, $\frac{f}{g}$, sont dérivables sur E, et on a alors
$$(\lambda f)' = \lambda f', \qquad (f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
- Si $f \in \mathscr{D}(E, \mathbb{R})$, $g \in \mathscr{D}(F, \mathbb{R})$ et $f(E) \subset F$, alors $g \circ f$ est dérivable sur E, et
$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$
- Si I est un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ est une bijection de I sur J et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J, et
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemples.

- Si $f : x \mapsto x^2$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f'(x) = 2x$. Par conséquent, la dérivée de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\star$, et on en déduit que la fonction $\sqrt{\cdot}$, qui est la bijection réciproque de f est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^\star) = \mathbb{R}_+^\star$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)}, \quad \text{autrement dit,} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
- Si $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$, *i.e.* $f(I) \subset \mathbb{R}_+^\star$, alors la fonction $h = \sqrt{f}$ est dérivable sur I, et
$$h' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Théorème - Dérivée et monotonie

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

- ◇ La fonction f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- ◇ Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur

I. En particulier, si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

Remarques.

- Il est crucial que I soit un intervalle : par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^\star$, mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^\star$.
- Les énoncés sont analogues dans le cas de fonctions décroissantes, ou strictement décroissantes.
- On a en fait la caractérisation : f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle de I non réduit à un point.

Exemple. La fonction $f = x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Ainsi f' est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

III Fonctions usuelles

1. Logarithme népérien et exponentielle

Définition - Logarithme népérien

On définit la fonction logarithme népérien, notée ln sur $\mathbb{R}_+^\star$, par

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Ainsi définie, la fonction ln est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui vaut 0 en 1 (nous montrerons ce résultat plus tard). On en déduit que :

- la dérivée de ln sur $\mathbb{R}_+^\star$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$,
- la fonction ln est strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Théorème - Propriété fondamentale du logarithme népérien

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Démonstration. On fixe $y \in \mathbb{R}_+^\star$, et on considère la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(xy) - \ln x - \ln y$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Il s'agit donc de montrer que φ est la fonction nulle. On observe que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\varphi'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$, égale à $\varphi(1) = 0$. Par conséquent, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. $\square$

Théorème - Propriétés de ln

i. Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

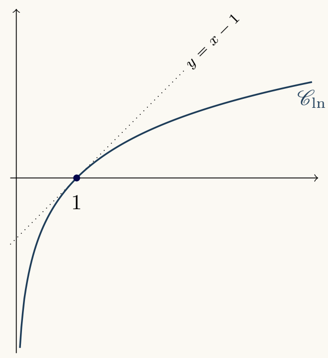
ii. Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$.

iii. Si $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

iv. Limites en 0^+ et $+\infty$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

v. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

vi. Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.



Démonstration. Les propriétés *i.* à *iii.* découlent directement du théorème précédent.

iv. Par stricte croissance de la fonction ln, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Par conséquent, $\ln(2^n) = n\ln(2) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, la fonction croissante ln est non majorée, ce qui entraîne que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

v. Par concavité, la courbe de la la fonction ln est en-dessous de sa tangente en 1, qui a pour équation $y = x - 1$.

vi. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\ln x = \ln\left(\sqrt{x}^2\right) = 2\ln\sqrt{x} \leqslant 2(\sqrt{x}-1) \leqslant 2\sqrt{x}, \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

par encadrement. Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on a alors par composition de limite $-\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $x\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$. □

La fonction ln étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$ tout entier d'après les limites de ln en 0 et en $+\infty$. En particulier, 1 a un unique antécédent, qu'on note e :

$$\ln \mathrm{e} = 1.$$

Définition - Fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle, notée exp, comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Il s'agit donc d'une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, et on a alors

$$\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarque. On a $\exp(0) = \exp(\ln 1) = 1$.

Théorème - Propriétés de exp

i. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp' = \exp$.
Par ailleurs, exp est strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

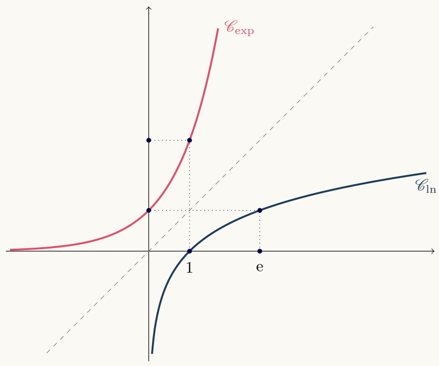
ii. Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

iii. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

iv. Limites en $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

v. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$.

vi. Croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$.



Démonstration.

i. La dérivée de la fonction ln ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc sa bijection réciproque exp est dérivable sur $\ln(\mathbb{R}_+^\star) = \mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par

$$\exp' = \frac{1}{\ln'(\exp)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp}} = \exp.$$

Ainsi, $\exp' = \exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et exp est strictement croissante. Par ailleurs, exp

Les autres propriétés sont déduites des propriétés de la fonction ln et sont laissées en exercice. □

2. Fonctions puissances réelles

Si $x \in \mathbb{R}+^\star$ et $n \in \mathbb{Z}$, on sait que $x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n\ln x)$. Nous allons nous baser sur cette égalité pour donner un sens à la notion de puissance non entière.

Définition - Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance d'exposant α sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}$$

On convient de noter $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Remarques.

- D'après ce qui précède, si $n \in \mathbb{Z}$, f_n coïncident avec la définition de la puissance. La notation x^α ne présente donc pas d'ambiguïté.
- On retiendra que, lorsque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, x^α n'est qu'une *notation* pour $\exp(\alpha \ln x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x = \exp(x \ln \mathrm{e}) = \exp(x)$. Par conséquent, on peut noter e^x au lieu de $\exp(x)$.
- ⚠ Lorsque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la notation x^α n'est valable que si $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Les puissances réelles vérifient les mêmes propriétés que les puissances entières.

Théorème - Propriétés des puissances réelles

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Démonstration. Simple application des propriétés de exp et ln. □

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

⚠ D'après ce qui précède, les fonctions $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt[n]{\cdot}$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^\star$, mais il faut bien noter qu'elles ne sont pas définies sur les mêmes ensembles : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^\star$, alors que $\sqrt[n]{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair, et sur $\mathbb{R}$ entier si n est impair.

Théorème - Dérivée des fonctions puissances réelles

La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f_\alpha'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

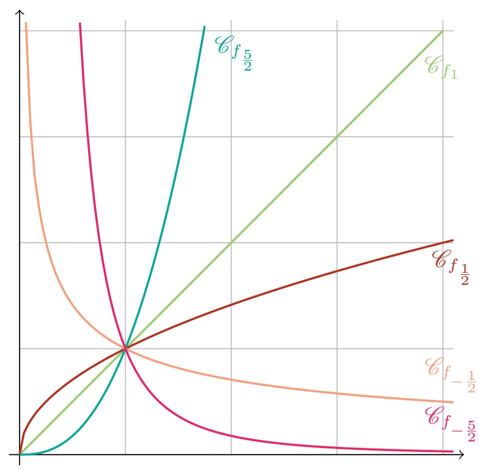
Démonstration. La fonction f_α est dérivable comme composée car ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f_\alpha'(x) = \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. □

Étude des fonctions puissances réelles

- f_α est croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$,
- f_α est concave pour $\alpha \in [0, 1]$, et convexe sinon,
- Limites :

$$x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et } x^\alpha \xrightarrow[x\to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

  Dans le cas $\alpha > 0$, f_α est donc prolongeable par continuité en 0, en posant $f_\alpha(0) = 0$.
- Si $\alpha > 0$, la courbe de f_α admet :
  - une tangente verticale en 0 si $\alpha < 1$,
  - une tangente horizontale en 0 si $\alpha > 1$.



Théorème - Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} |\ln x|^\alpha x^\beta = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\mathrm{e}^{\gamma x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta \mathrm{e}^{\gamma x} = 0.$$

Démonstration. Nous montrons seulement le premier résultat, les autres s'en déduisant aisément. On a

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha.$$

Or $x^{\frac{\beta}{\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, et on sait que $\frac{\ln y}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$, donc on obtient le résultat par composition de limites. □

3. Fonctions hyperboliques

Définition - Cosinus, sinus, tangente hyperboliques

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

- cosinus hyperbolique $\mathrm{ch} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$,
- sinus hyperbolique $\mathrm{sh} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$,
- tangente hyperbolique $\mathrm{th} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$.

Remarques.

- La fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction sh est négative sur $\mathbb{R}_-$, et positive sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x$ et $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x$.

Théorème - Propriétés des fonctions hyperboliques

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.
- Les fonctions ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}, \qquad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}, \qquad \mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2.$$

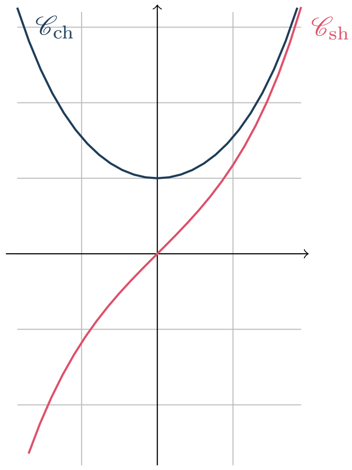
Démonstration.

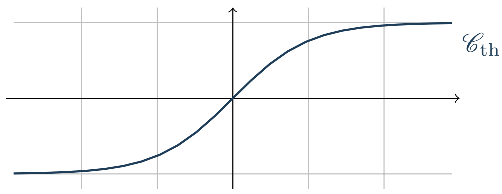
- On a $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = (\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x)(\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = 1$.
- La dérivabilité des fonctions ch, sh et th provient de la dérivabilité de la fonction exp, et les formules de sh' et ch' s'obtiennent directement. Par ailleurs, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}'(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}, \quad \text{et} \quad \mathrm{th}'(x) = 1 - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x). \ \square$$

Représentation graphique

- La fonction ch est paire, les fonctions sh et th sont impaires.
- La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions sh et th sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
- On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}\, x = -1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}\, x = 1$.





Exercice 1. Montrer que pour tous réels a, b,

- $\diamond$ $\operatorname{ch}(a+b) \;=\; \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$, $\quad \operatorname{sh}(a+b) \;=\; \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$,
- $\diamond$ $\operatorname{th}(a+b) \;=\; \dfrac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\ \operatorname{th}(b)}$.