

Chapitre 3

Calcul algébrique dans \mathbb{R}

I Généralités

1. Opérations sur \mathbb{R}

L'ensemble des réels \mathbb{R} est muni de deux opérations, l'*addition* et la *multiplication*, qui vérifient les propriétés suivantes.

Propriétés de l'addition et la multiplication

- Propriétés de l'addition :
 - commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x,$
 - associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z,$
 - élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x,$
 - existence d'opposé : $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0.$
- Propriétés de la multiplication :
 - commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x,$
 - associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z,$
 - élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = x,$
 - existence d'inverse dans \mathbb{R}^* : $\forall x \in \mathbb{R}^*, x \times \frac{1}{x} = 1.$
- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$

Plus tard, la liste de ces propriétés se résumera en : \mathbb{R} muni de ses opérations $+$ et \times est un *corps*.

Théorème - Intégrité de \mathbb{R}

Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

Démonstration. Supposons que $xy = 0$. Si $x \neq 0$, alors on a $\frac{1}{x}xy = 0$, ce qui donne $y = 0$. On a donc bien montré que $x = 0$ ou $y = 0$. \square

2. Inégalités dans \mathbb{R}

L'ensemble \mathbb{R} est muni d'une relation dite d'ordre \leqslant , qui vérifie les propriétés suivantes.

Propriétés de \leqslant

- Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant x.$
- Antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y.$
- Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z.$

On rappelle ci-dessous les résultats de compatibilités des inégalités avec les opérations.

Théorème - Compatibilité avec les opérations

Soient x, x', y, y', a des réels.

- *Addition d'inégalités.* Si $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$, alors $x + x' \leqslant y + y'.$
- *Multiplication par un réel.* Si $x \leqslant y$,
 - cas $a \in \mathbb{R}_+ : ax \leqslant ay.$
 - cas $a \in \mathbb{R}_- : ax \geqslant ay.$
- *Multiplication d'inégalités positives.* Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant x' \leqslant y'$, alors $xx' \leqslant yy'.$

- *Passage à l'inverse.* Si $x \leq y$ et x, y sont non nuls et de même signe, alors $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

⚠ On ne peut pas soustraire les inégalités !

Exemple. Si $x \in [1, 2]$, alors $3 \leq x + 2 \leq 4$ et $7 \leq 3x + 4 \leq 10$, donc $\frac{3}{10} \leq \frac{x+2}{3x+4} \leq \frac{4}{7}$.

Composition et inégalités

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , deux réels a et b dans I , et f une fonction définie sur I .

- Si f est croissante sur I , alors $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- Si f est décroissante sur I , alors $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- Si f est strictement croissante sur I , alors $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.
- Si f est strictement décroissante sur I , alors $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$.

Par conséquent, si f est strictement monotone sur I , alors $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

⚠ Si f est seulement croissante sur I et $a, b \in I$, on n'a pas en général : $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$. Par exemple, si f est une fonction constante et $b < a$, on a $f(a) \leq f(b)$ mais on n'a pas $a \leq b$.

Définition - Majorant, minorant, maximum, minimum

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que :

- ◊ $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de A si $\forall x \in A$, $x \leq M$, on dit alors que A est *majorée*,
- ◊ $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de A si $\forall x \in A$, $x \geq m$, on dit alors que A est *minorée*,
- ◊ A est bornée si elle est majorée et minorée,
- ◊ M est le *maximum* de A si A est majorée par M et $M \in A$.
- ◊ M est le *minimum* de A si A est minorée par m et $m \in A$.

3. Puissances et racine carrée

Définition - Puissance

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit le réel x^n par

$$x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit x^{-n} par $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Remarques.

- Par convention, $0^0 = 1$.
- En particulier, si $x \neq 0$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Théorème - Propriétés des puissances

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ et $n, p \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{array}{lll} i. \quad x^{n+p} = x^n \times x^p, & iii. \quad (xy)^n = x^n \times y^n, & v. \quad (x^n)^p = x^{n \times p}. \\ ii. \quad x^{n-p} = \frac{x^n}{x^p}, & iv. \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, & \end{array}$$

Exemples.

- Si $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ Par ailleurs, $\frac{1}{(-1)^n} = \left(\frac{1}{-1}\right)^n = (-1)^n$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, $(-a)^n = ((-1) \times a)^n = (-1)^n \times a^n$.

Définition-théorème - Racine carrée

Soit x un réel *positif*. Il existe un unique réel positif t tel que $t^2 = x$. On appelle ce réel la *racine carrée* de x et on le note \sqrt{x} .

Remarque. Si $x \in \mathbb{R}_+$, on a, par définition, $(\sqrt{x})^2 = x$.

Théorème - Propriétés

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\text{i. } \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}, \quad \text{ii. si } y \neq 0, \text{ alors } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Démonstration. Le résultat repose sur les propriétés des puissances :

- i. On a $(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy$. Comme $\sqrt{x}\sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$, on déduit de la définition de la racine carrée que $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
- ii. De même, on a $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{y})^2} = \frac{x}{y}$. Comme $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \in \mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. \square

4. Valeur absolue

Définition - Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est le réel, noté $|x|$, défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

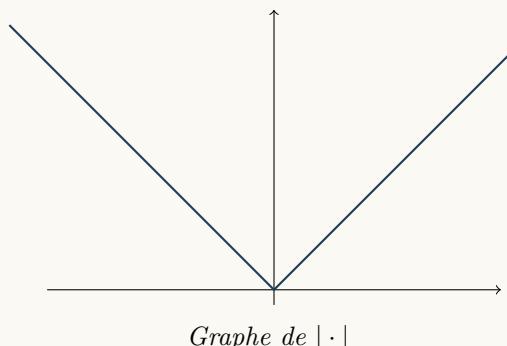
Remarque. La quantité $|y-x|$ s'interprète géométriquement comme la distance (toujours positive) sur la droite réelle entre x et y . En particulier, $|x|$ s'interprète comme la distance de x à l'origine.



Théorème - Propriétés de la valeur absolue

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$. On a :

- ◊ $|-x| = |x|$,
- ◊ $|x|^2 = x^2$,
- ◊ $-|x| \leq x \leq |x|$,
- ◊ $\sqrt{x^2} = |x|$
- ◊ $|xy| = |x||y|$ et si de plus y est non nul, alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- ◊ $|x| = a \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = -a)$,
- ◊ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$,
- ◊ $|x-y| \leq a \Leftrightarrow y-a \leq x \leq y+a$.



⚠ On a toujours $(\sqrt{x})^2 = x$ par définition de la racine carrée, mais on n'a pas toujours $\sqrt{x^2} = x$ (c'est impossible si $x < 0$). Il est en revanche toujours vrai que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 1. Donner, en fonction de x , une expression sans valeur absolue de la quantité $|x - 3| - |x + 2|$.

Théorème - Inégalité triangulaire

Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

- ◊ $|x + y| \leq |x| + |y|$, et $|x - y| \leq |x| + |y|$,
- ◊ $|x + y| \geq ||x| - |y||$, et $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

On peut résumer ces deux inégalités par :

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration.

- Comme $|x + y|^2 = (x + y)^2$, on a

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = (|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2) - (x^2 + 2xy + y^2) = 2(|xy| - xy),$$

car on a aussi $x = |x|$ et $y = |y|$. Comme $xy \leq |xy|$, on en déduit que $(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 \geq 0$.

En remplaçant y par $-y$ dans l'inégalité, on obtient $|x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

- Par l'inégalité triangulaire, on a $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| = |x + y| + |y|$. Ainsi, on obtient $|x + y| \geq |x| - |y|$.

En échangeant les rôles de x et y , on obtient aussi $|x + y| \geq |y| - |x|$. Par conséquent, $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

De même que ci-dessus, en remplaçant y par $-y$, on obtient $|x - y| \geq ||x| - |y||$. □

Remarques.

- Comme on l'a vu dans la preuve, la deuxième inégalité triangulaire se récrit :

$$|x + y| \geq |x| - |y| \quad \text{et} \quad |x + y| \geq |y| - |x|.$$

- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : on constate dans la preuve ci-dessus qu'on a l'égalité $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si $xy = |xy|$, c'est-à-dire $xy \in \mathbb{R}_+$. Autrement dit, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont de même signe.

On peut facilement étendre l'inégalité triangulaire au cas d'une somme de plus de deux réels.

Théorème - Inégalité triangulaire généralisée

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On a $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$. Autrement dit,

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence, et est laissée en exercice. □

Théorème - Caractérisation d'une partie bornée

Une partie A de \mathbb{R} est bornée si et seulement s'il existe un réel K tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leq K$.

Démonstration.

- Si A est bornée, alors il existe des réels $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in A$, $m \leq x \leq M$. On pose alors $K = \max(M, -m)$. Si $x \in A$, alors soit $|x| = x$, donc $|x| \leq M \leq K$, soit $|x| = -x \leq -m \leq K$. Par conséquent, on a $|x| \leq K$.
- S'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leq K$, alors A est minorée par $-K$ et majorée par K donc A est bornée. □

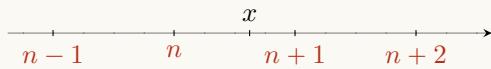
5. Partie entière

Définition-théorème - Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

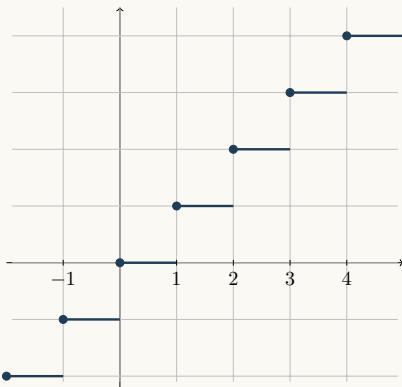
Cet entier est appelé la *partie entière* de x et est noté $[x]$.



On a alors :

- ◊ $[x] \leq x < [x] + 1$,
- ◊ $x - 1 < [x] \leq x$.

On appelle par ailleurs *partie fractionnaire* de x le réel $x - [x]$.



Remarques.

- Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $[n] = n$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $[x]$ est le plus grand entier de \mathbb{Z} inférieur à x .

Exemples. On a $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$ et $\left[-\frac{5}{4}\right] = -2$.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $[x + n] = [x] + n$.

On a $[x] \leq x < [x] + 1$, donc $[x] + n \leq x + n < [x] + n + 1$. Comme $[x] + n \in \mathbb{Z}$, ceci garantit que $[x + n] = [x] + n$.

Théorème - Croissance de la partie entière

La fonction partie entière est croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Montrons que $[x] \leq [y]$. On a

$$[x] \leq x \leq y < [y] + 1.$$

On déduit de l'inégalité $[x] < [y] + 1$ et du fait que $[x]$ et $[y]$ sont des entiers que $[x] \leq [y]$. □

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2[x] \leq [2x]$.