Chapitre 2

Sommes et produits

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels ou complexes.

I Sommes et produits

1. Le symbole $\sum$

Notation - Somme

- Soient un entier n et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. On note

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ la somme des nombres } a_1, \ldots, a_n \;:\; \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

  Plus généralement, si m, n sont des entiers tels que $m \leqslant n$, on note $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$.

- Si I est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ par I, la somme des éléments de cette famille est notée $\sum\limits_{i\in I} a_i$.

Remarques.

- L'indice d'une somme est *muet* (la somme ne dépend pas du choix de l'indice) : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \ldots + a_n$.
- Par convention, la somme vide est nulle : $\sum\limits_{k\in\varnothing} a_k = 0$. En particulier, si $m > n$, alors $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0$.

Exemples.

- Si $q \in \mathbb{K}$, $\;1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.
- Si $n \in \mathbb{N}^\star$, $1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)^2$.

Remarques.

- Si $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, alors la somme $\sum\limits_{k=m}^{n} a_i$ comprend $n - m + 1$ termes.
- On a alors $\sum\limits_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$, et plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{k=m}^{n} a = (n - m + 1)\, a$.

Les propriétés suivantes proviennent directement des propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$.

Théorème - Propriétés de la somme

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \lambda \in \mathbb{K}$, et un entier m tel que $m < n$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

⚠ On ne peut pas simplifier l'expression $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Remarque. Plus généralement, si I et J sont deux parties finies et disjointes de $\mathbb{N}$, $\sum\limits_{i\in I\sqcup J} a_i = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in J} a_i$.

En particulier, on peut séparer les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}.$$

2. Changement d'indice

Une somme peut être écrite de différentes manières selon le choix de l'indice. Il peut être plus pertinent de changer d'indice pour manipuler une somme. Voici deux exemples de réécriture de somme :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \;=\; a_0 + \ldots + a_{n-1} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} \;=\; a_{n-1} + \ldots + a_0 \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell.$$

On dit qu'on fait une réindexation de la somme en passant d'une écriture à l'autre. On distingue deux types de réindexation.

- **Translation** : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; a_m + \ldots + a_n \;=\; \sum_{\ell=m+p}^{n+p} a_{\ell-p}$, on a fait le changement d'indice $\ell = k + p$.
- **Symétrie** : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; a_m + \ldots + a_n \;=\; \sum_{\ell=p-n}^{p-m} a_{p-\ell}$: on a fait le changement d'indice $\ell = p - k$.

Remarque. On prendra l'habitude de vérifier en réindexant que le nombre de terme de la somme ne change pas, et que les termes de chacune des sommes sont les mêmes. Il pourra être utile à cette fin d'examiner le premier et le dernier terme.

⚠ On ne peut effectuer des changements d'indice que du type $\ell = k + p$ ou $\ell = p - k$, c'est-à-dire que le coefficient devant l'indice de sommation est soit 1 (translation), soit -1 (symétrie).

Exemples. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n+k} \;=\; \sum_{\ell=n+1}^{2n} \sqrt{\ell}$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-1} \sqrt{\ell}$.

3. Télescopage

Certaines sommes présentent la particularité que la quasi-totalité de ses termes s'annulent entre eux en sommant, par exemple :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) \;=\; (a_m - \cancel{a_{m+1}}) + (\cancel{a_{m+1}} - \cancel{a_{m+2}}) + \ldots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n}) + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) \;=\; a_m - a_{n+1},$$

les rendant très faciles à calculer. On parle de sommes *télescopiques*.

Théorème - Sommes télescopiques

Si $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_m, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$, alors

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) \;=\; a_{n+1} - a_m.$$

Démonstration. On a :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) \;=\; \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{\ell=m+1}^{n+1} a_\ell - \sum_{k=m}^{n} a_k \;=\; \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

où l'on a effectué le changement d'indice $\ell = k + 1$ dans la première somme, puis renommé l'indice (qui est muet). Ainsi,

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) \;=\; \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} - \left(a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k\right) \;=\; a_{n+1} - a_m.$$ □

Remarque. On a alors aussi $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) \;=\; a_m - a_{n+1}$.

Exemples.

- Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^{k+1} - 2^k) = 2^{n+1} - 1$.
- Si $n \in \mathbb{N}^\star$, alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

4. Sommes classiques

Théorème - Somme des *n* premiers entiers, n premiers carrés

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. On note $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

- Par changement d'indice, on a

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=0}^{n} (n-\ell) = n\sum_{\ell=0}^{n} 1 - \sum_{\ell=0}^{n} \ell = n(n+1) - S_1, \qquad \text{d'où } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3S_2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Comme par ailleurs par télescopage, $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3$, on en déduit que :

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{n+1}{2}\left((n+1)^2 - 3n - 2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$ □

Exercice 2. Par le même procédé, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Théorème - Sommes géométriques

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \leqslant n$ et $q \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \qquad \text{et plus généralement} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = q^m\,\frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Par télescopage, on a $(1-q)\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} (q^k - q^{k+1}) = q^m - q^{n+1} = q^m\left(1 - q^{n-m+1}\right)$. □

Exemples.

◇ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$.

◇ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Théorème - Formule de Bernoulli

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

Démonstration. Par télescopage, on a

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} \underbrace{b^{n-1-k}}_{=b^{n-(k+1)}} - a^k b^{n-k} = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n. \qquad \square$$

Remarque. En prenant $a = 1$, on a $1 - b^{n+1} = (1-b)\sum_{k=0}^{n} b^k$, et on retrouve le résultat sur les sommes géométriques.

5. Produits

On utilise une notation analogue à celle des sommes pour les produits.

Notation - Produit

Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont des réels, on note

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Remarques.

- Comme pour les sommes, on aura aussi parfois recours à la notation $\prod_{i \in I} a_i$.
- Par convention, le produit vide vaut 1 : $\prod_{i \in \varnothing} a_i = 1$.
- Si $a \in \mathbb{K}$ et les entiers m, n vérifient $m \leqslant n$, alors $\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$.
- Les changements d'indices se font de la même manière que pour les sommes.

Factorielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention, $0! = 1$.

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)! = (n+1)\, n!$

Théorème - Propriétés des produits

Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m < n$,

$$\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right), \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k} \text{ si } b_1, \dots, b_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{m} a_k \times \prod_{k=m+1}^{n} a_k.$$

En particulier, si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$.

⚠ On ne peut pas simplifier l'expression $\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$.

Théorème - Produits télescopiques

Si $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$ et $a_m, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}^\star$, alors
$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Démonstration. On a
$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_{k+1}}{\prod_{k=m}^{n} a_k} \overset{\ell=k+1}{=} \frac{\prod_{\ell=m+1}^{n+1} a_\ell}{\prod_{k=m}^{n} a_k} = \frac{\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) a_{n+1}}{a_m \prod_{k=m+1}^{n} a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$ □

Exemple. On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{k+1}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2^n}\frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{2^n}$.

II Coefficients binomiaux, formule du binôme

Rappel Si E est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments, on appelle *cardinal* de E son nombre d'éléments. On le note $\operatorname{Card} E$, ou encore $|E|$.

Définition - Coefficients binomiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle *coefficient binomial* "k parmi n" et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ si $n \in \mathbb{N}^\star$ ou de $\varnothing$ si $n = 0$.

Remarques.
- Si $k < 0$ ou $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.
- Plus généralement, $\binom{n}{k}$ désigne le nombres de parties à k éléments de tout ensemble à n éléments.

Théorème - Propriétés des coefficients binmoiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On a :

i. **Symétrie** : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ii. **Formule de Pascal** : si n non nul, alors $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

iii. **Formule du capitaine** : si n et k non nuls, alors $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration.

i. Choisir k éléments parmi $[\![1, n]\!]$ revient à sélectionner les $n - k$ éléments qu'on ne choisit pas. Il y a donc autant de parties à k éléments dans $[\![1, n]\!]$ que de parties à $n - k$ éléments.

ii. Nous allons compter les parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments en scindant l'ensemble de ces parties en 2 :
   - l'ensemble A des parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments qui contiennent l'élément n,
   - l'ensemble B des parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments qui ne contiennent pas n.

   Comme ceci décrit toutes les parties à k éléments, on a $\binom{n}{k} = |A| + |B|$. Ensuite, nous remarquons que
   - $|A|$ correspond au nombre de parties à $k - 1$ éléments dans $[\![1, n-1]\!]$, donc $|A| = \binom{n-1}{k-1}$,
   - $|B|$ correspond au nombre de parties à k éléments dans $[\![1, n-1]\!]$, donc $|B| = \binom{n-1}{k}$.

iii. On considère le problème suivant : on compte le nombre N de manières de choisir dans un groupe de n personnes une équipe de k personnes, parmi laquelle on choisit un capitaine. On peut procéder de deux manières différentes.

– On peut choisir d'abord un capitaine parmi les n personnes : il y a n choix. Pour chaque choix de capitaine, il y a $\binom{n-1}{k-1}$ choix d'équipe : il s'agit de choisir les $k-1$ autres membres de l'équipe dans le groupe de $n-1$ personnes restant. Finalement, on a

$$N = n\binom{n-1}{k-1}.$$

– On peut choisir d'abord l'équipe de k personnes : il y a alors $\binom{n}{k}$ choix. Pour chaque choix d'équipe, il y a k choix de capitaine. Finalement, on obtient que

$$N = k\binom{n}{k}.$$

On conclut alors que $k\binom{n}{k} = N = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où le résultat. □

Triangle de Pascal. La formule de Pascal fournit un moyen rapide et pratique de retrouver les coefficients sans avoir à les calculer. On écrit ces coefficients dans un tableau comme ci-dessous.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & k-1 & & k & \\
n-1 & \dots & \binom{n-1}{k-1} & \oplus & \binom{n-1}{k} & \dots \\
 & & & & \downarrow & \\
n & \dots & \dots & & \binom{n}{k} & \dots
\end{array}$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

On écrit d'abord les coefficients $\binom{n}{0}$ et les coefficients $\binom{n}{n}$, dont on sait qu'ils valent tous 1. Les autres coefficients sont alors obtenus en additionnant les coefficients situés au-dessus et à gauche au-dessus. On peut ainsi remplir progressivement le tableau, qu'on appelle triangle de Pascal du fait de sa forme.

Exercice 3. Soient $n, k, i \in \mathbb{N}$. Si on reproduit la démarche de la démonstration de la formule du capitaine et choisissant k équipes dans un groupe de n personnes, et cette fois i capitaines dans chaque équipe, quelle formule obtient-on ?

Théorème - Expression des coefficients binomiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: "pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– *Initialisation.* Si $n = 0$, on a $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!\,n!}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
– *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on cherche à montrer $\mathcal{P}(n+1)$. Soit un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n+1$. D'après la formule de Pascal, on a

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{k\,n!}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui conclut. □

Remarques.

– On retrouve alors la relation de symétrie des coefficients binomiaux : si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

– On retrouve également la formule du capitaine : si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = \frac{k\,n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Exemples. Si $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Théorème - Formule du binôme de Newton

Si $a, b \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Démonstration. Montrons la formule par récurrence sur n.

– *Initialisation.* On a $(a+n)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.

– *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la formule est vraie au rang n. Montrons-la au rang $n+1$: d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=\boxed{0}}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{\boxed{n+1}}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \quad \textit{car } \tbinom{n}{-1} = \tbinom{n}{n+1} = 0\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

par la formule de Pascal. □

Exemples.
- ◇ Cas $n = 3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1$.
- ◇ Cas $n = 4$: alors $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1$.
- ◇ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$.
  $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

⚠ Ne pas confondre la formule du binôme de Newton avec la formule de Bernoulli (dans laquelle il n'y a pas de coefficients binomiaux) !

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-k}.$$

III Sommes doubles

Il arrive qu'on souhaite sommer des éléments qui dépendent de deux indices différents. On parle alors de sommes doubles.

Exemple. Si on multiplie les sommes $\sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\sum_{j=1}^{p} b_j$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_p) = \begin{array}{ll} & a_1b_1 + \ldots + a_1b_p \\ + & a_2b_1 + \ldots + a_2b_p \\ + & \ldots \\ + & a_nb_1 + \ldots + a_nb_p. \end{array}$$

On somme donc les termes a_ib_j pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Cette somme est notée $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_ib_j$.

Sommes rectangulaires

On parle de somme double *rectangulaire* quand on somme les termes d'une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathbb{K}$. La somme est notée

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}, \quad \text{et} \quad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} \quad \text{si } n = p \quad \text{(on parle alors de somme } \textit{carrée}\text{)}.$$

Ceci revient à sommer les termes d'un tableau rectangulaire, dont on s'aperçoit aisément qu'on peut le sommer ligne à ligne, ou colonne à colonne :

$i\backslash j$	1	2	$\ldots$	p	
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\ldots$	$a_{1,p}$	$\longrightarrow \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\ldots$	$a_{2,p}$	$\longrightarrow \sum_{j=1}^{p} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\ldots$	$a_{n,p}$	$\longrightarrow \sum_{j=1}^{p} a_{n,j}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\ldots$	$\downarrow$	
	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,p}$	

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \qquad\qquad \Big\} \rightarrow \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

On retiendra le résultat suivant.

Théorème - Permutation des sommes rectangulaires

On a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Sommes triangulaires

On parle de sommes *triangulaires* lorsqu'on somme les termes d'une famille de la forme $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ ou $(a_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note alors les sommes respectives

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}, \quad \text{et} \quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}.$$

Dans le premier cas, ceci revient à sommer les éléments d'un tableau carré dont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i < j$ sont nuls. À nouveau, sommer ligne à ligne ou colonne à colonne est équivalent, ce qui donne deux formulations des sommes triangulaires.

Le deuxième cas est une simple adaptation.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
i\backslash j & 1 & 2 & \dots & p & \\ \hline
1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \hline
2 & & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \longrightarrow \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{2,j} \\ \hline
\vdots & & & \ddots & \vdots & \quad \vdots \\ \hline
n & & & & a_{n,n} & \longrightarrow \displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n,j} \\ \hline
 & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_{i,1} & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2} & \dots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} & \Big\} \to \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}
\end{array}
\qquad \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

On retiendra le résultat de permutation des sommes suivant.

Théorème - Permutation des sommes triangulaires

On a :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right), \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right).$$

Remarque. Il sera toujours utile lors du calcul d'une somme double de se demander si le calcul ne serait pas plus aisé en permutant les sommes, en suivant les règles ci-dessus.

Exemple. Calcul de la somme $S_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

D'après les règles de permutation, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\right), \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right).$$

La somme $\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$ n'étant pas une somme qu'on sait calculer, on choisit la deuxième version. On a

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1 = \frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}n.$$

Ainsi, $S_n = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$.

Le résultat qui suit est une généralisation de l'identité remarquable bien connue $(a_1+a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$ au cas d'une somme de n termes.

Théorème - Carré d'une somme

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i a_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j\right) + a_i^2 + \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j\\ &= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.\end{aligned}$$

Les première et troisième somme de ce dernier terme sont identiques (on obtient l'une à partir de l'autre en échangeant les indices de sommation i et j), d'où le résultat. □