Chapitre 1

Rudiments de logique – Ensembles

I Eléments de logique

1. Propositions et prédicats

Définition - Proposition logique

On appelle *proposition*, ou *assertion* tout énoncé qui est soit vrai, soit faux.

Exemples.

- Les énoncés “Paris est la capitale de la France”, “$1+1=2$”, sont des propositions vraies (on dit que leur valeur de vérité est vraie). Les énoncés “$1+1=0$”, “π est un nombre rationnel” sont des propositions fausses.
- Les énoncés “Bonjour”, “$(2x+1)\mathrm{e}^x$”, ne sont pas des propositions.

On dit que deux propositions sont *équivalentes* si elles ont même valeur de vérité. Ainsi, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions équivalentes et qu'on veut montrer que $\mathcal{P}$ est vraie, on pourra montrer que $\mathcal{Q}$ est vraie.

Dans les raisonnements mathématiques, on écrit simplement “$\mathcal{P}$”, au lieu de “$\mathcal{P}$ est vraie”.

On appelle par ailleurs *théorème* une assertion démontrée comme vraie.

Définition - Prédicat

On appelle *prédicat* un énoncé contenant une ou plusieurs variables, tel qu'en substituant chaque variable par une valeur choisie dans un ensemble, on obtient une proposition.

Exemple. L'énoncé “n est un entier premier” est un prédicat : il est vrai ou faux selon la valeur de la variable n.

Remarque. On notera généralement $\mathcal{P}(x)$ un prédicat dont la valeur de vérité dépend de la valeur d'une variable x.

2. Connecteurs logiques

Nous allons voir qu'on peut construire, à partir d'une ou plusieurs propositions, de nouvelles propositions à l'aide de *connecteurs logiques*.

Définition - Négation

La *négation* d'une proposition $\mathcal{P}$, notée $\neg\mathcal{P}$, ou non $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Remarques.

- Table de vérité de $\neg\,\mathcal{P}$:

$\mathcal{P}$	$\neg\,\mathcal{P}$
V	F
F	V

- La proposition $\neg\,(\neg\,\mathcal{P})$ est équivalente à $\mathcal{P}$.

Définition - Conjonction, disjonction

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- *Conjonction.* La proposition $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, notée aussi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est la proposition qui est vraie si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies toutes les deux, et fausse sinon.
- *Disjonction.* La proposition $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, notée aussi $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$, est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie, et fausse sinon.

Remarques. – Table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

– ⚠ Le *ou* logique est *inclusif* : “$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$” est vraie lorsque soit P est vraie, soit Q est vraie, soit les deux le sont.

Exemple. La proposition “La fonction ln est croissante” ou “la fonction exp est décroissante” est vraie.

Théorème - Principes du tiers exclus et de non contradiction

Soit $\mathcal{P}$ une proposition.

- *Principe de tiers exclus.* La proposition $\mathcal{P} \vee (\neg \mathcal{P})$ est vraie.
- *Principe de non contradiction.* La proposition $\mathcal{P} \wedge (\neg \mathcal{P})$ est fausse.

Démonstration. Simple vérification sur une table de vérité. □

Montrer $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$

Pour montrer que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie, on pourra rédiger de la manière suivante.

Supposons que $\mathcal{P}$ est fausse. Montrons que $\mathcal{Q}$ est vraie.

| *Preuve de $\mathcal{Q}$*

En effet, on sait que $\mathcal{P} \vee (\neg \mathcal{P})$ est vraie, donc par disjonction de cas :

- soit $\mathcal{P}$ est vraie, et $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie,
- soit $\mathcal{P}$ est fausse, et on aura montré que $\mathcal{Q}$ est vraie, donc $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie.

Théorème - Lois de Morgan

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- ◇ La proposition $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ est équivalente à $(\neg \mathcal{P}) \wedge (\neg \mathcal{Q})$.
- ◇ La proposition $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$” est équivalente à $(\neg \mathcal{P}) \vee (\neg \mathcal{Q})$.

Démonstration. On vérifie à l'aide d'une table de vérité que les propositions $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $(\neg \mathcal{P}) \wedge (\neg \mathcal{Q})$ ont les mêmes valeurs de vérité. De même pour les propositions $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $(\neg \mathcal{P}) \vee (\neg \mathcal{Q})$. □

Exemple. Si on considère le lancer de deux dés et qu'on appelle $\mathcal{P}$ la proposition “le premier dé est pair”, et $\mathcal{Q}$ la proposition “le deuxième dé est pair”, alors :

- La proposition $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ est équivalente à $(\neg \mathcal{P}) \vee (\neg \mathcal{Q})$: “au moins un des dés n'est pas pair.”
- La proposition $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ est équivalente à $(\neg \mathcal{P}) \wedge (\neg \mathcal{Q})$: “aucun des dés n'est pair.”

Définition - Implication, équivalence

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- **Implication.** On note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ la proposition qui est fausse si $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse, et vraie sinon.
- **Équivalence.** On note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ la proposition qui est vraie si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont même valeur de vérité, et fausse sinon.

Remarques.

– Table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

– La proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ se lit "$\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$" ou bien "si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$". En français, une implication se traduit par les mots : *donc*, *alors*, *par conséquent*, *ainsi*, *d'où*, ...

– *Négation de* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: par définition de l'implication, la proposition $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}$.

– *Autre formulation de* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: l'implication équivaut à la négation de $\neg(P \Rightarrow Q)$, c'est-à-dire $(\neg P) \vee \mathcal{Q}$.

– ⚠ Cela peut surprendre mais, lorsque $\mathcal{P}$ est fausse, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est toujours vraie. Il faut retenir qu'une proposition fausse implique n'importe quelle autre.

Exemple. La proposition "si un éléphant est rose, alors il a cinq pattes" est vraie.

Exemples.

– "Je prends mon parapluie dès qu'il pleut" peut s'écrire : "Il pleut $\Rightarrow$ Je prends mon parapluie", sa négation peut s'écrire : "Il pleut et je ne prends pas mon parapluie".
– "Les champignons ne poussent qu'en automne" peut s'écrire "Il y a des champignons $\Rightarrow$ C'est l'automne." Sa négation peut d'écrire "Il y a des champignons et ce n'est pas l'automne."

Montrer $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on rédigera de la manière suivante.

Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie. Montrons que $\mathcal{Q}$ est vraie.

| *Preuve de $\mathcal{Q}$*

Condition nécessaire, condition suffisante.

Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie,

⋆ $\mathcal{Q}$ est vraie dès que $\mathcal{P}$ est vraie donc *il suffit que* $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ le soit aussi : on dit que $\mathcal{P}$ est une *condition suffisante* pour avoir $\mathcal{Q}$,
⋆ si $\mathcal{Q}$ est fausse, $\mathcal{P}$ ne peut pas être vraie donc *il faut que* $\mathcal{Q}$ soit vraie pour que $\mathcal{P}$ le soit : on dit que $\mathcal{Q}$ est une *condition nécessaire* pour avoir $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour avoir $\mathcal{Q}$.

Définition - Réciproque, contraposée

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

– On appelle *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
– On appelle *contraposée* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ l'implication $(\neg \mathcal{Q}) \Rightarrow (\neg \mathcal{P})$.

Exemple. La contraposée de la proposition "s'il pleut, il y a des nuages" est "s'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas".

Théorème - Implication, contraposée, équivalence

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

– L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est équivalente à sa contraposée $(\neg \mathcal{Q}) \Rightarrow (\neg \mathcal{P})$.
– L'équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est équivalente à la double implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$.

Démonstration. On peut par exemple vérifier ces équivalences sur une table de vérité. □

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons : n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair. Nous allons raisonner par double implication.

- Montrons : n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

  Supposons que n est pair. On sait alors qu'on peut écrire $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc n^2 est pair.

- Montrons : n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

  Raisonnons par contraposée : montrons "n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair".

  Supposons que n est impair. On sait alors que n s'écrit $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

  $$n^2 \;=\; (2k+1)^2 \;=\; 4k^2+4k+1 \;=\; 2(2k^2+2k)+1.$$

  Ceci entraîne que n^2 est impair, et conclut la preuve.

⚠ L'utilisation des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ est PROSCRITE à l'intérieur de la rédaction. Ces symboles ne pourront être utilisés *que* dans des propositions mathématiques.

On retiendra donc les raisonnements suivants pour montrer une implication ou une équivalence.

Montrer une implication, montrer une équivalence

- Pour montrer une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on peut procéder :
  - de manière directe : on suppose $\mathcal{P}$ vraie, et on montre que $\mathcal{Q}$ est alors vraie,
  - par contraposée : on suppose $\mathcal{Q}$ fausse, et on montre que $\mathcal{P}$ est alors fausse.
- Pour démontrer une équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on peut procéder :
  - par équivalence : on établit une succession d'équivalence : $\mathcal{P} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mathcal{Q}$,
  - par double implication : on montre séparément $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

3. Quantificateurs

a. Propositions quantifiées

Définition - Quantificateurs universel et existentiel

Soit $\mathcal{P}(x)$ un prédicat. On introduit les propositions suivantes.

- **Quantificateur universel.** La proposition $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si pour toute valeur de x, la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie, et fausse sinon.
- **Quantificateur existentiel.** La proposition $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie s'il est possible de trouver au moins une valeur de x telle que la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie, et fausse sinon.

Remarques.

- Dans la pratique, la variable x a pour valeur un élément d'un ensemble E fixé, et on écrira alors $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ et $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$, qui ne sont autres que des notations pour $\forall x,\ (x \in E \Rightarrow \mathcal{P}(x))$ et $\exists x,\ (x \in E \Rightarrow \mathcal{P}(x))$.
- ⚠ Il faut bien noter que $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ et $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ ne sont pas des prédicats, mais bien des propositions : leur valeur de vérité ne dépend pas de la valeur d'une variable.

  On retiendra que toute variable précédée par un quantificateur dans une proposition (on parle de variable *quantifiée*) est *muette* : on peut changer son écriture sans changer la proposition : $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ et $\forall y,\ \mathcal{P}(y)$ sont en fait les mêmes propositions.

  Par conséquent, une variable quantifiée ne vit *qu'à l'intérieur de la proposition.*

⚠ Les quantificateurs sont des symboles mathématiques, pas des abréviations ! On ne les écrit pas au milieu d'une phrase en français. On écrira dans ce cas "pour tout" ou "il existe" en toutes lettres.

Exemples.

– Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition “n est pair” se récrit : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$.
– Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  – La proposition “f est positive sur $\mathbb{R}$” se récrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
  – La proposition “f est croissante sur $\mathbb{R}$” se récrit : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$.

Montrer une proposition universelle

Pour montrer une proposition du type $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$, on commence par fixer un élément $x \in E$, puis on montre que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. On aura alors bien montré que $\mathcal{P}(x)$ est vraie *pour tous les éléments* $x \in E$.

Dans la pratique, on écrit :

Soit $x \in E$. Montrons $\mathcal{P}(x)$.

$\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(x)}$

Montrer une proposition existentielle

Pour montrer une proposition du type $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$, on peut :

– soit utiliser une preuve *constructive*, c'est-à-dire trouver un exemple explicite d'élément x_0 de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie, dans ce cas on écrira :

  Posons $x_0 = \dots$ Montrons $\mathcal{P}(x_0)$.

  $\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(x_0)}$

– soit utiliser un théorème dit *d'existence*, qui prouvera l'existence de x, sans en donner un exemple explicite.

Exemples.

– Montrons : $\exists x \in [0, 3],\ x^2 - 3x + 2 < 0$.

  Posons $x_0 = \frac{3}{2}$. On a bien $x_0 \in [0, 3]$ et $x_0^2 - 3x_0 + 2 = -\frac{1}{4} < 0$. La proposition est donc démontrée.

– Montrons : $\exists x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x + x = 0$.

  On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto x + \mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^{-1} < 1$, on a $f(-1) < 0$. Par ailleurs, $f(0) = 1$.
  Par conséquent, comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $x \in]-1, 0[$ tel que $f(x) = 0$, ce qui conclut.

Théorème - Négation des proposition quantifiées

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat.

– La proposition $\neg \big(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)\big)$ est équivalente à $\exists x \in E,\ \neg \mathcal{P}(x)$.
– La proposition $\neg \big(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)\big)$ est équivalente à $\forall x \in E,\ \neg \mathcal{P}(x)$.

Exemples.

– Négation de “tous les humains ont les yeux bleus” : “il existe au moins un humain qui n'a pas les yeux bleus”.
– Négation de “$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$” : “$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$”.

À retenir. Pour nier une proposition avec des quantificateurs, on pourra procéder de la manière suivante.

1. On remplace les quantificateurs $\forall$ par $\exists$, et les quantificateurs $\exists$ par $\forall$,
2. On nie le prédicat final.

Exemple. Négation de $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x, y)$: $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \neg \mathcal{P}(x, y)$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrivons la négation de $\mathcal{P}$: "f est croissante" sous la forme d'une proposition quantifiée. Comme on l'a vu, $\mathcal{P}$ est équivalente à $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. Ainsi, $\neg\mathcal{P}$ équivaut à

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y \ \text{ et } \ f(x) > f(y).$$

⚠ Dans une proposition faisant intervenir plusieurs quantificateurs, il faut faire très attention à l'ordre des quantificateurs. À titre d'exemple :

- La proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$" est vraie : pour tout réel x, on peut trouver un réel y tel que $x < y$, il suffit par exemple de choisir $y = x + 1$.
- Mais la proposition "$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y$" est fausse : on ne peut pas trouver de réel y qui soit supérieur à tous les réels.

On méditera aussi sur l'exemple suivant : la proposition "dans toutes les cerises, il y a un noyau", est bien différente de la proposition "il y a un noyau qui est dans toutes les cerises" !

Permutation de quantificateurs.

- On peut permuter deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels sans changer la valeur de vérité de la proposition :

$$\big(\forall x,\ \forall y,\ \mathcal{P}(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall y,\ \forall x,\ \mathcal{P}(x,y)\big), \quad \text{et} \quad \big(\exists x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists y,\ \exists x,\ \mathcal{P}(x,y)\big).$$

- On ne peut pas permuter deux quantificateurs différents : en général la proposition $\big(\forall x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y)\big)$ n'est pas équivalente à $\big(\exists y,\ \forall x,\ \mathcal{P}(x,y)\big)$.

Remarque. On peut donc regrouper les quantificateurs $\forall$ consécutifs ou les quantificateurs $\exists$ consécutifs. Par exemple, la proposition $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se récrit $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ou encore $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b. Existence et unicité

Notation. Si $\mathcal{P}(x)$ est un prédicat, on note $\exists\,!\,x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ la proposition qui est vraie s'il existe *un unique* élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie, et fausse sinon.

Exemple. La proposition $\exists\,!\,n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant 2n \leqslant 5$ est vraie : il existe un unique entier n vérifiant $3 \leqslant 2n \leqslant 5$, il s'agit de $n = 2$.

Pour montrer qu'une proposition du type $\exists\,!\,x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie, on est amené à montrer :

- l'*existence* : on montre que qu'il y a *au moins un* élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ($\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$),
- l'*unicité* : on montre qu'il y a *au plus* un élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Montrer l'unicité

Pour démontrer l'*unicité*, on peut supposer que deux éléments vérifient la propriété recherchée puis montrer que ces éléments sont égaux.

Dans la pratique, on écrit :

Soient $x, y \in E$ tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$ sont vraies. Montrons que $x = y$.

| *Preuve de $x = y$.*

⚠ Lorsqu'on a écrit cette preuve, on n'a pas démontré l'existence ! On a seulement montré que *s'il existe un élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie*, alors il est unique.

Remarque. Certaines démonstrations d'existence et unicité se font au moyen d'un raisonnement par analyse-synthèse, que nous détaillerons plus loin.

II Ensembles

Un *ensemble* est une collection ou un groupement d'objets, qu'on appelle les *éléments* de l'ensemble.
Notation : si E est un ensemble, on note $x \in E$ si x est un élément de E et $x \notin E$ si x ne l'est pas.

Pour définir un ensemble, on peut procéder des différentes manières suivantes.

- Définition en *extension* : on énumère tous les éléments de l'ensemble. On s'autorise aussi parfois à n'écrire que le début de l'énumération des éléments lorsque la suite se comprend implicitement.

  Exemples : $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

- Définition en *compréhension* : on sélectionne dans un ensemble plus gros les éléments vérifiant une certaine propriété : $E = \{x \in F,\ \mathcal{P}(x)\}$.

  Exemples : $P = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$.

- Définition *paramétrique* : on décrit l'ensemble comme l'ensemble des images $f(x)$ d'une fonction f lorsque x parcourt un ensemble A donné : $E = \{f(x),\ x \in A\}$.

  Exemples : $P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple. Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^\star\right\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Définition - Cardinal

Si E est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments, on appelle *cardinal* de E le nombre de ses éléments. On le note $\operatorname{Card} E$, ou $|E|$.

Remarques.
- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'*ensemble vide* et est noté $\varnothing$.
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un *singleton*.

1. Inclusion, égalité d'ensembles, ensemble des parties d'un ensemble

Définition - Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B, c'est-à-dire

$$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in E, \qquad \text{ou encore} \qquad \forall x \in A,\ x \in E.$$

Dans ce cas, on note $A \subset B$. On dit aussi que A est une *partie*, ou un *sous-ensemble* de B.
On note par ailleurs $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.

Remarques.
- On peut donc écrire indifféremment $A \subset B$ ou $A \in \mathscr{P}(B)$.
- L'ensemble $\mathscr{P}(A)$ est un ensemble d'ensembles : ses éléments sont les parties de A.
- Les ensembles $\varnothing$ et A sont toujours des parties de A.

Exemple. $\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Définition-théorème - Egalité de deux ensembles

On dit que deux ensembles A et B sont égaux, et on note $A = B$, si A et B ont exactement les mêmes éléments.
Autrement dit, $\forall x,\ x \in A \iff x \in B$.
Ainsi, $A = B$ équivaut à ($A \subset B$ et $B \subset A$).

Comme l'inclusion et l'égalité entre ensembles s'écrivent à l'aide d'une implication ou d'une équivalence, la preuve de ces assertions se rédige comme nous l'avons vu plus haut.

Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

- Soient A, B deux ensembles. Pour montrer que $A \subset B$, on écrit :

  Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$.

  $\boxed{\textit{Preuve de } x \in B.}$

- Pour montrer que $A = B$, on peut :
  - soit montrer séparément que $A \subset B$, puis que $B \subset A$ (on dira qu'on raisonne par double inclusion),
  - soit raisonner par équivalence : *Soit x. On a $x \in A \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in B$.*

Exemple. Soit $A = \{x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R}_+,\, x \leqslant y\}$. Montrons que $A = \mathbb{R}_-$.

On procède par double inclusion.

$\subset$ Soit $x \in A$, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a $x \leqslant y$. Montrons que $x \in \mathbb{R}_-$.

En prenant $y = 0$, on obtient que $x \leqslant 0$, donc $x \in \mathbb{R}_-$.

$\supset$ Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Montrons que $x \in A$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$. On a $x \leqslant 0 \leqslant y$, donc $x \leqslant y$, et $x \in A$.

2. Opérations sur les ensembles

Définition - Union, intersection

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle *union* de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- On appelle *intersection* de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Remarques.
- Pour tout ensemble A, on a $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
- Si $A \subset E$, alors $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap E = A$.
- Si A et B sont deux ensembles, on a $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.

Théorème - Propriétés de l'intersection et de l'union

Soient A, B et C trois ensembles. On a les propriétés suivantes.

- *Commutativité* : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
- *Associativité* : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *Distributivité* : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exemple. Si A et B sont deux ensembles, alors :
- ⋄ $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$,
- ⋄ $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

On peut généraliser l'intersection et l'union à un nombre quelconque de sous-ensembles. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on définit
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x,\, \exists i \in I,\, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x,\, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Exemples. 1. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$, 2. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[= \mathbb{R}_+$, 3. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^\star} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

Définition - Ensembles disjoints, partition

- On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément en commun. Dans ce cas, on note parfois $A \sqcup B$ au lieu de $A \cup B$.
- Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble $\{A_i,\, i \in I\}$ de parties non vides de E est une *partition* si :

  i. les ensembles A_i sont deux à deux disjoints : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$, *ii.* $\bigsqcup_{i \in I} A_i = E$.

Exemples. 1. Si $A = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$, alors A et B forment une partition de $\mathbb{N}$.

En effet, $A \cap B = \varnothing$, et $A \cup B = \mathbb{N}$.

2. Si $C_n = [n, n+1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les ensembles C_n forment une partition de $\mathbb{R}_+$.

Définition - Différence, complémentaire

Soient E un ensemble et A, B des parties de E.

- On appelle *différence de B dans A* l'ensemble $B \backslash A = \{x \in B,\ x \notin A\}$.
- On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E \backslash A$. On le note $\overline{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On a donc $\overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$, ou encore : $\forall x \in E,\ x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

Remarques.

- Si $A \subset E$, alors $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$: A et $\overline{A}$ forment une partition de E.
- Si A et B sont deux ensembles, $B \backslash A = B \cap \overline{A}$.
- Si A et B sont deux ensembles, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

  En effet, la contraposée de $x \in A \Rightarrow x \in B$ s'écrit $x \notin B \Rightarrow x \notin A$.
- Si $A \subset E$, alors $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{E} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = E$.

Exemple. Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle $]-1, 3]$ est l'ensemble $]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$.

Théorème - Lois de Morgan

Si E est un ensemble et A et B sont deux parties de E, alors

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Démonstration. Ceci découle directement des lois de Morgan pour les propositions (exercice : s'en convaincre !). ☐

Exercice 1. Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Cet ensemble est appelé *différence symétrique de A et B* et se note $A \Delta B$.

Définition - Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. On définit le *produit cartésien* de E et de F, noté $E \times F$, comme l'ensemble des couples dont la première composante est un élément de E et la seconde un élément de F, c'est-à-dire

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Dans le cas où $E = F$, on note E^2 au lieu de $E \times E$.

⚠ Un couple (x, y) et un ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ sont des objets mathématiques bien différents. Par exemple, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, mais $(1, 2) \neq (2, 1)$, ou encore : $\{1, 1\} = \{1\}$, mais $(1, 1) \neq (1)$.

Généralisation. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles, on définit le *produit cartésien* de ces ensembles par

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\}.$$

Un élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$ est appelé un $n-$uplet.
Lorsque $E_1 = \ldots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times \ldots \times E_n$.

Remarques.

- Dans une proposition quantifiée, il est équivalent d'écrire "$\forall x \in A,\ \forall y \in B \ldots$" ou "$\forall (x, y) \in A \times B, \ldots$".
- On a par ailleurs tendance à condenser l'écriture "$\forall (x, y) \in E^2, \ldots$" en "$\forall x, y \in E, \ldots$".

III Raisonnement

Pour démontrer qu'une proposition $\mathcal{P}$ est vraie, on peut penser aux raisonnements suivants.

– **Déduction.** Si on sait que $\mathcal{Q}$ est vraie et que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{P}$ est vraie (*modus ponens*).

  C'est le raisonnement utilisé lorsqu'on invoque un théorème pour montrer un résultat.

– **Disjonction de cas.** On peut souhaiter séparer la démonstration d'une proposition en l'étude d'une liste exhaustive de sous-cas.

  En particulier, il arrive qu'on distingue le cas où une proposition $\mathcal{Q}$ est vraie, et celui ou elle est fausse. On aura alors montré $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ et $\neg\, \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, ce qui suffit à montrer que $\mathcal{P}$ est vraie.

  Exercice 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est un entier pair.

– **Raisonnement par l'absurde.** On commence par supposer que $\mathcal{P}$ est fausse, puis on montre qu'on peut alors en déduire une contradiction, c'est-à-dire une proposition de la forme $\mathcal{Q} \wedge (\neg\, \mathcal{Q})$. On en conclut que $\mathcal{P}$ est vraie.

Montrer $\mathcal{P}$ par l'absurde. Pour montrer que $\mathcal{P}$ est vrai en raisonnant par l'absurde, on écrit :

Supposons que $\mathcal{P}$ est fausse.

| *Alors* $\boxed{\ldots}$ *, il y a donc contradiction.*

Donc $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On sait donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux.

$$\text{Comme } \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{on a } 2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{donc } p^2 = 2q^2.$$

Ceci implique que p^2 est pair donc, comme nous l'avons vu, p est pair. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Ainsi,

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad \text{donc } q^2 = 2k^2.$$

Par conséquent, q^2 est pair. À nouveau, ceci implique que q est pair. Finalement, on a montré que p est pair et q est pair, donc p et q ont 2 pour diviseur commun, et $\frac{p}{q}$ n'est pas sous forme irréductible, il y a contradiction.

On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Nous avons déjà rencontré le cas de la démonstration d'une proposition sous la forme d'une implication ou d'une équivalence. Nous détaillons deux techniques supplémentaires qui s'appliquent à des situations bien particulières.

1. Raisonnement par analyse synthèse

Il faut penser à cette démarche :

– lorsqu'on cherche à résoudre un problème du type "trouver tous les x tels que $\mathcal{P}(x)$" (par exemple : une équation ou une inéquation),
– lorsqu'on cherche à montrer une proposition du type "il existe un unique x tel que $\mathcal{P}(x)$". Ceci revient d'ailleurs au cas ci-dessus, auquel on ajoute le fait qu'il y a une unique solution x.

Raisonner par analyse-synthèse

On procède en deux étapes :

– **Analyse** : On suppose qu'il existe x tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie et on cherche à en déduire des valeurs possibles de x. On raisonne par *conditions nécessaires.*

Analyse. *Soit x tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.*

$$\boxed{\ldots}\text{, alors (nécessairement) } x \in \underbrace{\{\ldots\}}_{\text{Ensemble des “candidats”}}.$$

On obtient un ensemble qui contient tous les “candidats possibles” pour x. C'est-à-dire que x ne peut pas prendre d'autres valeurs, mais on ne peut garantir à ce stade que toutes ces valeurs sont solutions.

– **Synthèse** : “on vérifie si le ou les candidats sont valides”. On détermine les éléments x dans l'ensemble de “candidats” ci-dessus pour lesquels $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

En d'autres termes, on détermine si les conditions nécessaires sont suffisantes.

On conclut ensuite en donnant l'intégralité des solutions, déterminées lors de la synthèse.

Remarque. Lorsqu'on utilise ce raisonnement pour montrer “$\exists! x \in E,\ \mathcal{P}(x)$”, on écrit :

Analyse. *Soit x tel que $\mathcal{P}(x)$.*

$\boxed{\ldots}$ *, alors $x = x_0$ (à ce stade on a montré l'unicité).*

Synthèse. *Montrons que $\mathcal{P}(x_0)$ est vrai*

$\boxed{\text{Preuve de } \mathcal{P}(x_0)}$ *(ce qui montre l'existence).*

.

Exemple. Résolvons l'équation $\sqrt{x} = 2x - 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ par analyse-synthèse.

– *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}_+$ une solution de l'équation. En composant par la fonction carrée, on obtient alors

$$x = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1, \quad \text{donc} \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Comme les racines de $4x^2 - 5x + 1$ sont 1 et $\frac{1}{4}$, on en déduit que $x \in \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$.

– *Synthèse.* On constate que 1 est bien solution de l'équation, mais $\frac{1}{4}$ ne l'est pas.

On a donc montré que 1 est la seule solution de l'équation.

Exemple. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$ (en d'autres termes, f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire).

– *Analyse.* Soit (g, h) un couple de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x), \\ f(-x) & = & g(x) - h(x) \end{array}\right.$$

du fait que $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$. En additionnant, puis en soustrayant les deux égalités ci-dessus, on obtient
$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

– *Synthèse.* Si on pose $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, on a

◇ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = f(x)$, donc $f = g + h$,

◇ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, donc f est paire,

◇ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -g(x)$, donc g est impaire.

Ainsi, le couple (g, h) est l'unique couple de fonctions qui convient.

2. Raisonnement par récurrence

On considère un prédicat $\mathcal{P}(n)$ qui porte sur la variable n à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence fournit un moyen de montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Principe de récurrence. Si on a :

– $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*Initialisation*),

– $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*Hérédité*),

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Rédiger une démonstration par récurrence

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Initialisation. $\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(0)}$.
- Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.*

  $\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(n+1)}$.

⚠ Dans l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !), mais bien que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n fixé. On montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque. On peut adapter ce raisonnement pour le cas où on souhaite montrer $\forall n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n)$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Il suffit alors de remplacer $\mathcal{P}(0)$ par $\mathcal{P}(n_0)$ dans l'initialisation, et de fixer un entier $n \geqslant n_0$ dans l'hérédité.

Exemple. Soit x un réel positif. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Nous allons raisonner par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: "$(1+x)^n \geqslant 1+nx$".

- *Initialisation.* Si $n = 0$, on a $(1+x)^n = 1 = 1+nx$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx).$$

  car d'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, et $1+x \geqslant 0$. Ainsi, on trouve en développant que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$, car $nx^2 \geqslant 0$. Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Remarque. Soient n_1, n_2 deux entiers naturels, si l'hérédité n'est valable que pour $n \in [\![n_1, n_2]\!]$, on parle de récurrence finie :

si $\mathcal{P}(n_1)$ est vraie et $\forall n \in [\![n_1, n_2-1]\!], \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie, alors $\forall n \in [\![n_1, n_2]\!], \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Récurrence double

Parfois, on ne parvient pas à déduire $\mathcal{P}(n+1)$ de $\mathcal{P}(n)$, mais on parvient à montrer $\mathcal{P}(n+2)$ en supposant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On peut alors utiliser le principe dit de *récurrence double* :

si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ est vraie, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Il s'agit en faut d'une simple adaptation du principe ci-dessus : on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On rédige alors de la manière suivante.

Rédaction d'une récurrence double

- Initialisation. $\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(0) \textit{ et } \mathcal{P}(1)}$.
- Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Montrons $\mathcal{P}(n+2)$.*

  $\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(n+2)}$.

Exemple. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = u_1 = -1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n = 3^n - 2^{n+1}$".

- *Initialisation.* Si $n = 0$, on a $3^n - 2^{n+1} = -1 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
  Si $n = 1$, on a $3^n - 2^{n+1} = -1 = u_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

– *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et montrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(3^{n+1} - 2^{n+2}\right) - 6\left(3^n - 2^{n+1}\right) = 9 \times 3^n - 4 \times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Remarque. Si nécessaire, on peut bien sûr également faire des raisonnements par récurrence triple, voire des récurrences d'ordre supérieur.

Récurrence forte

Il arrive même qu'on ait besoin de supposer que toutes les propositions $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies pour en déduire $\mathcal{P}(n+1)$. On peut s'appuyer sur le principe dit de *récurrence forte* :

$$\text{si } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie et } \forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie, alors } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

À nouveau, il s'agit d'une simple adaptation du principe de récurrence : on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies.

Rédaction d'une récurrence forte

– Initialisation. $\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(0)}$.

– Hérédité. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.*

$\boxed{\textit{Preuve de } \mathcal{P}(n+1)}$.

Exemple. Montrons que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$: "n admet un diviseur premier". Montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

– *Initialisation.* Comme 2 est premier, $\mathcal{P}(2)$ est clairement vraie.
– *Hérédité.* Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \leqslant n$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Si $n+1$ est premier, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est clairement vérifiée.

Si en revanche $n+1$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur dans $[\![2, n]\!]$. On peut donc écrire $n+1 = ab$, où a et b sont deux entiers appartenant à $[\![2, n]\!]$. L'hypothèse de récurrence assure alors que a possède un diviseur premier, qui est aussi diviseur de $n+1$, ce qui conclut.